Dokazi

Izjava, lema, izrek, posledica → izjava, ki jo dokažemo

Izjava: . . . .

Dokaz:

. . . .

. . . .

. . . . $\square$ ← konec dokaza

QED ← quite easily done

Osnovna pravila sklepanja

Pravila vpeljave: kako dokažemo izjavo

Pravila uporabe: kako uporabimo, kar že vemo, da velja
(bodisi zato ker smo to že dokazali
bodisi zato ker smo to predpostavili)

Pravila zamenjave:
1. Enake vrednosti lahko medsebojno menjamo
2. Izjavo lahko nadomestimo v dokazu z ekvivalentno izjavo.

Struktura dokaza:

- vedeti moramo, kaj trenutno dokazujemo
- vedno moramo poznati trenutni kontekst: spremenljivke in predpostavke
- Dokaz je sestavljen iz delov (poddokazov). Dokaz ima drevesno strukturo, se veji na manjše kose. Dokaz mora biti končen.

Pravila vpeljave

(1) Konstanta $\top$: $\top$ velja in je ni treba posebej dokazovati

Pišemo: Dokazujemo $\top$.
To je očitno. ✓

(2) Konstanta $\bot$: ni pravila vpeljave

(3) Konjunkcija:

Dokazujemo $A \land B$:

1. Dokazujemo A:

pod-dokaz A

2. Dokazujemo B:

pod-dokaz B.

4) Disjunkcija:

Dokažemo $A \vee B$

- Dokažimo A:

Dokaz A

Dokažemo $A \vee B$

- Dokažimo B

Dokaz B

5) Implikacija:

Dokažemo $A \Rightarrow B$:

- predpostavimo A:

Dokažemo B:

dokaz B

samo v tem delu imamo predpostavko A

$(x \cdot y) + 3$

...

6) Ekvivalenca:

okrajšava za $(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A)$

Dokažemo $A \Leftrightarrow B$:

1. Dokažemo $A \Rightarrow B$:

   .....

2. Dokažemo $B \Rightarrow A$:

   .....

(7) Negacija:

Dokazujemo $\neg A$.

- Predpostavimo A:

$\boxed{\text{dokažemo } \bot}$

To običajno dokažemo tako, da dokažemo (iz danih predpostavk) protislovni izjavi: B in $\neg B$.

$\neg(\sqrt{2} \in \mathbb{Q})$

Predpostavimo $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$:

. . . .

. . . .

. . . .

protislovje

(8) Dokaz s protislovjem (ni pravilo vpeljave), posebno pravilo:

Dokazujemo A.

- Predpostavimo $\neg A$:

$\boxed{\text{dokažemo } \bot}$

(9) Zakon o izključeni tretji možnosti (ni pravilo vpeljave):

Za vse izjave velja $A \vee \neg A$.

$3 + |x - 4| \leq 5$

$x < 4 \vee x \geq 4$

$x < 4 \vee \neg(x < 4)$

Kvantifikatorji

(10) Univerzalni kvantifikator:

množica

Dokazujemo $\forall x \in A .\ \varphi(x)$:

- Naj bo $x \in A$: dokazujemo $\varphi(x)$

$$\boxed{\text{dokaz } \varphi(x)}$$

Pozor:
x mora biti sveža spremenljivka
(Trenutno ga še nimamo v kontekstu.

Bolje: Dokazujemo $\forall x \in A .\ \varphi(x)$.

(Pravimo, ali že imamo x, ali ga že uporabljamo v kak drug namen. Po potrebi najprej preimenujemo x)

Dokazujemo $\forall \xi \in A .\ \varphi(\xi)$

- Naj bo $\xi \in A$: dokazujemo $\varphi(\xi)$

$$\boxed{\text{dokaz } \varphi(\xi)}$$

Primer:

$$\left(\int_0^1 f(x)\,dx\right) \times \int_0^1 g(x)\,dx =$$

$$\left(\int_0^1 f(x)\,dx\right) \times \int_0^1 g(y)\,dy =$$

$$\iint_{[0,1]\times[0,1]} f(x)\cdot g(y)\,dx\,dy$$

11

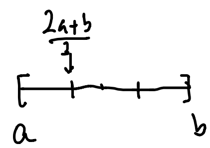
Eksistenčni kvantifikator:

Dokažujemo $\exists x \in A .\ \varphi(x)$

Primer: Dokažujemo $\exists x \in [0,7] .\ x > 5$.

Vzemimo $x := 2\pi$. Preverimo $2\pi \in [0,7]$.

Preverimo $2\pi > 5$.



Primer: $a, b \in \mathbb{R}$ in $a < b$.

Dokažujemo $\exists x \in [a,b] .\ x > \frac{1}{3}(2a+b)$.

Vzemimo $x := \frac{a+b}{2}$.

Preverimo $\frac{a+b}{2} \in [a,b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$

.....

Preverimo $\frac{a+b}{2} > \frac{1}{3}(2a+b)$

....

Pravilo:

Dokažujemo $\exists x \in A .\ \varphi(x)$. konkretne konstrukcije!

- Vzemimo $x := \boxed{\ .....\ }$.

1. Preverimo, da za izbrani x velja $x \in A$.
2. Preverimo, da za izbrani x velja $\varphi(x)$.

Pravila uporabe

Uporabimo jih, da nekaj naredimo s predpostavko ali z že prej dokazano izjavo.

(a) Konjunkcija:

Vemo $A \wedge B$.

Torej velja tudi A.

Torej velja tudi B.

(b) Disjunkcija:

Vemo $A \vee B$. (*)

Dokazujemo C.

Uporabimo (*):

1. Če velja A:

dokažemo C (smemo uporabiti A)

2. Če velja B:

dokažemo C (smemo uporabiti B)