Simbolni zapis

Simboli: $+, -, 0, 1, \int, \Sigma, \partial$

<u>Kontekst</u>: nabor vseh trenutno veljavnih simbolov.

$$\sqrt{x^2+y^2-1}$$

Predikatni račun

Logična formula = matematična izjava, zapisana s simboli

<u>Izjavni vezniki</u>

- resničnostni konstanti $\bot$ neresnica
  $\top$ resnica
- negacija: $\neg A$ "ne A", "A ni res", "A ne velja"
- konjunkcija: $A \wedge B$ "A in B"
- disjunkcija: $A \vee B$ "A ali B"
- implikacija: $A \Rightarrow B$

"iz A sledi B"
"če A, potem B"
"B sledi iz A"
"A je zadosten pogoj za B"
"B je potreben pogoj za A."

- ekvivalenca: $A \Leftrightarrow B$

"A je ekvivalenten B"
"A, če in samo če B"
"A čee B" "A iff B"
"A je potreben in zadosten pogoj za B"

Prioriteta operatorjev:

$3 + 5 \cdot 7 = 3 + (5 \cdot 7)$
$\neq (3+5) \cdot 7$

$\neg$ ima prednost pred
$\wedge$ ima prednost pred
$\vee$ ima prednost pred
$\Rightarrow, \Leftrightarrow$ ima prednost pred
$\forall, \exists$

Primeri:

$A \wedge \neg B \vee C = (A \wedge (\neg B)) \vee C$

$A \wedge B \Rightarrow B \vee C = (A \wedge B) \Rightarrow (B \vee C)$

$(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A) \neq A \Rightarrow B \wedge B \Rightarrow A$
?

$A \wedge B \wedge C \overset{?}{=} (A \wedge B) \wedge C$
$\overset{?}{=} A \wedge (B \wedge C)$

$3+4+5 = (3+4)+5$
$= 3 + (4+5)$

$3-1-7 = (3-1)-7 \neq 3-(1-7)$

Operator $*$ je

- levo asociativen, združuje na levo: $A*B*C = (A*B)*C$
- desno asociativen, združuje na desno: $A*B*C = A*(B*C)$
- ne-asociativen, ne združuje: $A*B*C$ dvoumen zapis

Dogovor:

$\land, \lor$ levo asociativna

$\Rightarrow$ desno asociativna

$\Leftrightarrow$ ni asociativna

Primeri:

levo: $+, -, \times, /$

desno:

a^{b^c} $\neq$ $(a^b)^c$

$= a^{(b^c)}$

$A \Leftrightarrow B \Leftrightarrow C$ nevljudno

$$\left.\begin{aligned} &(x+1)^2 - x^2 = \\ &x^2 + 2x + 1 - x^2 = \\ &2x + 1 \end{aligned}\right\}$$

$A = B = C$ $=$

beremo kot $(A = B) = C$? Nobeden od

beremo kot $A = (B = C)$? teh

Dogovor: $A = B = C$ pomeni $A = B$ in $B = C$

$3 = x+7$

$4 = x+8$

$5 = x+9$

Dogovor: $A \Leftrightarrow B \Leftrightarrow C$ pomeni $A \Leftrightarrow B$ in $B \Leftrightarrow C$

Kvantifikatorja:

množica, izjava

- univerzalni : $\forall x \in A . \varphi$ "za vse x iz A velja φ"
- eksistenčni : $\exists x \in A . \varphi$ "obstaja x iz A, da φ"

"za neki $x \in A$ velja φ"

"za vsaj $x \in A$ velja φ"

Prioriteta:

$$\forall x \in A . (\varphi(x) \Rightarrow \psi(x))$$

$$\forall x \in A . \varphi(x) \land \exists y \in B . \psi(y)$$

$$(\forall x \in A . \varphi(x)) \land \exists y \in B . \psi(y)$$

$\forall$ in $\exists$ sta "požrešna", "pobereta" kolikor se da.

$$\forall x \in A . (\varphi(x) \land \exists y \in B . \psi(y))$$

$$\forall n \in \mathbb{N} . f(n) = 0 \lor f(n) = 1 \Rightarrow \exists n \in \mathbb{N} . f(n) = 0 \lor \forall n \in \mathbb{N} . f(n) = 1$$

Dogovor

$$\forall n \in \mathbb{N} . ((f(n) = 0 \lor f(n) = 1) \Rightarrow \exists n \in \mathbb{N} . (f(n) = 0 \lor \forall n \in \mathbb{N} . f(n) = 1))$$

Bolj smiselno:

$$(\forall n \in \mathbb{N} . f(n) = 0 \lor f(n) = 1) \Rightarrow (\exists n \in \mathbb{N} . f(n) = 0) \lor (\forall n \in \mathbb{N} . f(n) = 1)$$

Velja vprašati: Kaj je f?

V kvantifikatorjih je spremenljivka <u>vezana</u>.

$$\forall x \in \mathbb{R}. \; \underbrace{\left(x > 0 \Rightarrow \exists y \in \mathbb{R}. \; y^2 = x \right)}_{\text{"območje 'veljavnosti' } x\text{"}}$$

vezan

vezan v

Podobno: $x \mapsto \underbrace{(y \mapsto x^2 - y)}$

vezan

vezan v

Vezano spremenljivko lahko preimenujemo:

$$\int_0^1 x^2 + 7x \, dx \equiv \int_0^1 t^2 + 7t \, dt$$

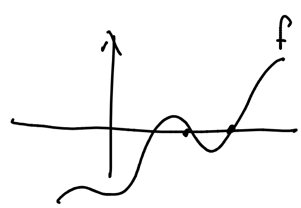
x je vezan v integralu t je vezan v integralu

v definiciji f v definiciji f:

$f(x) = \sin(x + \frac{\pi}{4})$ $f(t) = \sin(t + \frac{\pi}{4})$

Denimo, da velja za $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ in $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

- $\exists x \in \mathbb{R}. \; f(x) = 0$ in
- $\exists x \in \mathbb{R}. \; g(x) = 0$ .... $\exists y \in \mathbb{R}. \; g(y) = 0$



Naj bo $x \in \mathbb{R}$:

$x < 7$ resničnost je odvisna od x.

$\forall x \in \mathbb{R}. \; x < 7$ ni res

$\exists x \in \mathbb{R}. \; x < 7$ res

$f(x) = 0$ "f je 0 pri x"

$\exists x \in \mathbb{R}. f(x) = 0$ "f je 0 pri vsaj enem argumentu"

$\forall x \in \mathbb{R}. f(x) = 0$ "f je vedno nič" "f in g imata skupno ničlo":

$$\exists \underset{\uparrow\ \text{ksi}}{\xi} \in \mathbb{R}. \big(f(\xi)=0 \wedge g(\xi)=0 \big)$$

ξ ξ ξ

ξ ζ zeta

Opombe:

- disjunkcija je inkluzivna → $A \vee B$ lahko velja A in B

  (ni ekskluzivna)

  ekskluzivni ali (XOR): $A \veebar B$ velja A ali B, vendar ne oba

- implikacija je veljavna, če antecedens neveljaven

$$\underset{\substack{\text{antecedens}\\ \text{predpostavka}}}{A} \Rightarrow \underset{\substack{\text{konsekvent}\\ \text{sklep}}}{B}$$

$$\underbrace{3+2<4}_{\text{neresničen}} \Rightarrow 6=8$$

"$\underbrace{\text{Če ne kupiš žemljic}}$, pa prinesi kruh"

- Vrstni red kvantifikatorjev je pomemben:

  $\forall x \in \mathbb{R}. \exists y \in \mathbb{R}. \ x<y$ "Od vsakega števila je neko večje."

  $\exists y \in \mathbb{R}. \forall x \in \mathbb{R}. \ x<y$ "Je število nad vsemi."

Slab zapis: $x^2+7 < x^3+4x+5 \quad \forall x \in \mathbb{R}$ $\quad \boxed{dx\, x^2+7 \int_0^1}$

Bolje: $x^2+7 < x^3+4x+5$ za vsak $x \in \mathbb{R}$

---

prazna množica

$\forall x \in \emptyset .\ x > 0$ je res

$\forall x \in \emptyset .\ \varphi(x)$ je res "pogoj je na prazno izpolnjen"

$\exists x \in \emptyset .\ \varphi(x)$ ni res

$\exists x \in \emptyset .\ 1 = 1$ ne