Aritmetika množic

Konstrukcije množic

1. Kartezični produkt

Kartezični produkt ali **zmnožek** množic A in B je množica $A \times B$. Elementi $A \times B$ so **urejeni pari**

$\square \times \square$

$$(x, y) \quad \text{kjer } x \in A \text{ in } y \in B.$$

$x + y$

Kanonični projekciji

$$\pi_1 : A \times B \to A$$
$$(x, y) \mapsto x$$

$$\pi_2 : A \times B \to B$$
$$(x, y) \mapsto y$$

Druge oznake:

- π_0, π_1
- p_1, p_2
- fst, snd

Slaba:

π_A, π_B !!!

$\mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$\pi_{\mathbb{R}} \quad \pi_{\mathbb{R}}$??

Princip ekstenzionalnosti za pare:

Za vse $p, q \in A \times B$ velja:
če je $\pi_1(p) = \pi_1(q)$ in $\pi_2(p) = \pi_2(q)$, potem $p = q$.

Sledi: $\quad (\pi_1(p), \pi_2(p)) = p \qquad$ za $p \in A \times B$

Preverimo: $\pi_1(\pi_1(p), \pi_2(p)) = \pi_1(p)$

$\pi_2(\pi_1(p), \pi_2(p)) = \pi_2(p)$

$2+3+7+8$ "

$((2+3)+7)+8$

Kartezični produkt večih množic

$A \times B \times C \times D$ elementi (a,b,c,d) kjer $a \in A$, $b \in B$, $c \in C$, $d \in D$

$\| ?$ $\| ?$

$A \times (B \times (C \times D))$ $(a,(b,(c,d)))$

$\square \times \square \times \square \times \square$

cos sin

Standardni enojec

$1 := \{()\}$

prazna večterica "urejena ničterica"

definicija

$=$ $\triangleq$ $\stackrel{def}{=}$ $\equiv$

Prazna množica

$\emptyset = \{\}$ množica brez elementov

tudi oznaka 0

Eksponentne množice

Eksponent ali eksponentna množica množic A in B je

množica $\quad B^A \quad$ elementi: preslikave iz A v B.

(pišemo tudi $A \to B$)

Princip ekstenzionalnosti za preslikave:

Preslikavi $f, g : A \to B$ sta enaki, če slikata elemente domene v iste vrednosti.

$$(\forall x \in A .\ f(x) = g(x)) \Rightarrow f = g$$

Če za vsak $x \in A$ velja $f(x) = g(x)$, potem je $f = g$.

Primeri:

$\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ množica realnih zaporedij

$\mathbb{R}^{(\mathbb{R}^{\mathbb{N}})}$ preslikave, ki slikajo realna zaporedje v relna števila

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^{\mathbb{N}} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ a &\longmapsto 0 \end{aligned}$$

vsako zaporedje a slikamo v 0

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^{\mathbb{N}} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ a &\longmapsto a(0) + a(42) \end{aligned}$$

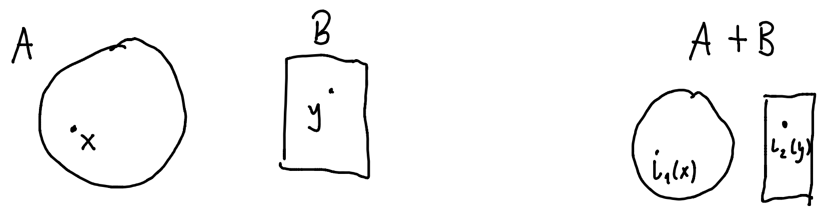
Vsota ali koprodukt

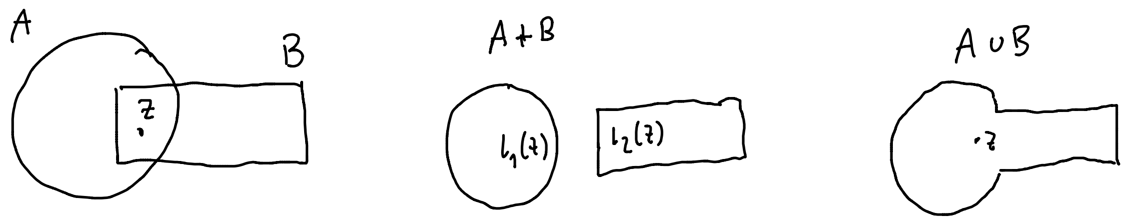
$\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon, \eta, \theta, \varphi,$ η ζ ξ zeta ksi χ $\mathcal{X}$ K Hi

Vsota množic A in B je množica

$A + B$ elementi $\iota_1(x)$ za $x \in A$

$\iota_2(y)$ za $y \in B$





Primer: $\{1,2,3\} \cup \{3,4\} = \{1,2,3,4\}$

$$\{1,2,3\} + \{3,4\} = \{\iota_1(1), \iota_1(2), \iota_1(3), \iota_2(3), \iota_2(4)\}$$

Pravimo tudi, da je $A+B$ disjunktna unija množic A in B.

Pišemo $A \uplus B$, $A \amalg B$

Kanonični injekciji:

$$\iota_1 : A \to A+B \qquad \iota_2 : B \to A+B$$
$$x \mapsto \iota_1(x) \qquad y \mapsto \iota_2(y)$$

Elementa $u, v \in A+B$ sta enaka, če velja

- bodisi $u = \iota_1(x)$, $v = \iota_1(x')$ in $x = x'$ za neka $x, x' \in A$
- bodisi $u = \iota_2(y)$, $v = \iota_2(y')$ in $y = y'$ za neka $y, y' \in B$

Kako zapišemo funkcijske predpise na $A \times B$ in $A + B$

Produkt:

$$f : A \times B \longrightarrow C$$
$$(a, b) \longmapsto \cdots a \cdots b \cdots$$

$$f(x, y) := \cdots x \cdots y \cdots$$

Vsota:

$$g : A + B \longrightarrow C$$

$$\left.\begin{array}{l} g : \iota_1(a) \longmapsto \cdots a \cdots \\ g : \iota_2(b) \longmapsto \cdots b \cdots \end{array}\right\} \text{ obravnavamo dva primera}$$

$$g(u) := \begin{cases} \cdots a \cdots & \text{če } u = \iota_1(a) \text{ za neki } a \in A \\ \cdots b \cdots & \text{če } u = \iota_2(b) \text{ za neki } b \in B \end{cases}$$

Primer: Preslikavo lahko podamo "po kosih":

$$h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

$$h(x) := \begin{cases} 7x + 3 & \text{če } x \leq 8 \\ x^2 - 5 & \text{če } x > 8 \end{cases}$$

Pišemo:

$$x \longmapsto \begin{cases} 7x + 3 & \text{če } x \leq 8 \\ x^2 - 5 & \text{če } x > 8 \end{cases}$$

Pišemo:

$$h(x) = 7x + 3 \quad \text{če } x \leq 8$$
$$h(x) = x^2 - 5 \quad \text{če } x > 8$$

Slabo:

$$\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto \begin{cases} x+3 & x<0 \\ x-7 & x>1 \end{cases}$$

ni celovit predpis (0.5 nima prirejene vrednosti)

Slabo:

$$\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto \begin{cases} x+3 & x<1 \\ x-7 & x>0 \end{cases}$$

ni enoličen (0.5 ima prirejeni vrednosti 3.5 in −6.5)

OK:

$$\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto \begin{cases} -x & \text{če } x \leq 0 \\ x & \text{če } x \geq 0 \end{cases}$$

pri 0 se predpisa prekrivata, vse je ok, ker se ujemata: $0 = -0$.

Aritmetika množic

Za vse množice A, B in C velja:

1. A + ∅ ≅ A
2. A + B ≅ B + A
3. (A + B) + C ≅ A + (B + C)

4. A × 1 ≅ A
5. A × B ≅ B × A
6. (A × B) × C ≅ A × (B × C)

7. A × (B + C) ≅ A × B + A × C
8. A × ∅ ≅ ∅

9. A^1 ≅ A
10. 1^A ≅ 1
11. A^∅ ≅ 1 $\quad A^{\emptyset} \cong 1$
12. $\emptyset^A$ ≅ ∅ če A ≠ ∅
13. A^(B × C) ≅ (A^B)^C
14. A^(B + C) ≅ A^B × A^C
15. (A × B)^C ≅ A^C × B^C

$$A\text{^}B \equiv A^B$$

Izomorfizem 13:

$$A^{B\times C} \cong (A^B)^C$$

$$f : A^{B\times C} \longrightarrow (A^B)^C$$

$$\underset{A^{B\times C}}{h} \longmapsto (\underset{C}{c} \longmapsto (\underset{B}{b} \longmapsto \underset{A}{\overbrace{h(b,c)}^{\text{lahko uporabim } h,c,b}}))$$

$$g : (A^B)^C \longrightarrow A^{B\times C}$$

$$\ell \longmapsto ((\underset{B}{x}, \underset{C}{y}) \longmapsto \underbrace{\overbrace{\ell(y)}^{A^B}(x)}_{A})$$

Preveriti: $f \circ g = id_{(A^B)^C}$ in $g \circ f = id_{A^{B\times C}}$