Logika & množice

Osnovno o množicah

Množica je zbirka/skupek elementov.

Relacija "je element"

$x \in A$ "x je element množica A"

"x pripada A"

"" A vsebuje x" "

$\{a,b,c\}$ množica, ki vsebuje natanko a, b in c

Vrstni red ni pomemben, ponovitve lahko zanemarimo. $\{a,b\}$

$$\{1,2,3,2\} = \{1,3,2\} = \{1,1,1,1,3,2\}$$

Aksiom ekstenzionalnosti

Množici sta enaki, če imate iste elemente.

Množici A in B sta enaki, pišemo $A = B$, če za vsak x velja $x \in A \Leftrightarrow x \in B$.

Primer: $A = \{1, 2, 2\}$ $B = \{2, 1\}$

Dokažemo, da sta enaki:

- vsak element iz A je tudi element B:

  $1 \in B$ ✓

  $2 \in B$ ✓

  $2 \in B$ ✓

- vsak element iz B tudi v A:

  $2 \in A$ ✓

  $1 \in A$ ✓

$\{3, 7\} = \{3, 7\}$

Poznamo že množice $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$

$\mathbb{Z}$

$\mathbb{Q}$

$\mathbb{R}$

Osnovno o preslikavah

Preslikava sestoji iz:

1. Domena } množici
2. Kodomena }
3. Prirejanje:
   pravilo, ki elementom domene prireja elemente kodomene in je:
   - enolično
   - celovito

Preslikavo označimo $\cancel{A : f \to B}$

$$f : A \longrightarrow B$$

ime preslikave (prirejanje)   domena   kodomena

$$A \xrightarrow{f} B$$

pišemo tudi takole

$$A \longrightarrow B$$

$$\cdot \xrightarrow{f} \cdot$$

Prirejanje f je <u>enolično</u>, če:

- Vsakemu elementu $x \in A$, f priredi največ en element $y \in B$ iz kodomene.
- Če f priredi $y_1 \in B$ elementu $x \in A$ in priredi $y_2 \in B$ elementu $x \in A$, potem $y_1 = y_2$.
- $\forall x \in A . (\forall y \in B . (\forall z \in B . ((f \text{ priredi } y \text{ elementu } x \text{ in } f \text{ priredi } z \text{ elementu } x) \Rightarrow y = z)))$

(pozor: to <u>ni</u> injektivnost preslikave f)

$$3 \cdot 5 + 8$$

$$(3 \cdot 5) + 8 \qquad 3 \cdot (5 + 8)$$

f je <u>celovita</u>:

- Če vsakemu elementu domene priredi vsaj en element kodomene
- Za vsak $x \in A$ obstaja $y \in B$, da f x-u priredi y
- $\forall x \in A . \exists y \in B .$ f x-u priredi y

(Pozor: to ni surjektivnost)

f je enolično & celovito: vsakemu elementu iz A priredi natanko en element B.

Element B, ki je prirejen elementu $x \in A$ označimo

$f(x)$ aplikacija / uporaba funkcije f na argumentu x
preslikave
prirejanja

Pišemo tudi: $f\ x$

$f\ x\ y = (f\ x)\ y$

$x + y + z = (x+y)+z$ ✓

$x + (y+z)$

Funkcijski predpis:

zapis, s katerim lahko podamo prirejanje

$x \mapsto \underbrace{\dots}_{\text{izraz}}$

tudi:

$f : x \mapsto \dots$

x-u priredimo izraz ...

x se slika v .....

Primeri:

$x \mapsto x^2 + 7$

domena $\mathbb{R}$

kodomena $\mathbb{Q}$

$x \mapsto \sqrt{1 - x^2}$

Zapis:

$$f : \underset{\text{domena}}{A} \longrightarrow \underset{\text{kodomena}}{B}$$

$$x \longmapsto \dots \qquad \text{predpis}$$

ime

parameter

vezana spremenljivka (lokalna, ima veljavnost samo znotraj predpisa)

Vezano spremenljivko lahko preimenujemo

$$\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

prosta spremenljivka, prosti parameter

$$x \longmapsto 2 \cdot a \cdot x + 3 \qquad y \mapsto 2 \cdot a \cdot y + 3$$

vezana

$$4 \longmapsto \cancel{8a+3} \qquad 4 \mapsto 8a+3$$

$$2 \cdot a \cdot 4 + 3 = 8a + 3$$

$$a \mapsto 2 \cdot a \cdot x + 3$$

$$4 \mapsto 2 \cdot 4 \cdot x + 3 = 8x + 3$$

Primer:

$$x \longmapsto 42$$

Primer:

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

$$f : x \mapsto x^2 + 7$$

Pišemo tudi:

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

$$f(x) = x^2 + 7$$

$$f(4) = 4^2 + 7$$

Primer:

$$(\underline{x} \mapsto x^2 + 7)(4) = 4^2 + 7$$

4

$$(\underline{g} \mapsto g(5))\,(\underbrace{x \mapsto x+2}) =$$

$x \mapsto x+2$

$$(x \mapsto x+2)(5)$$

Kompozicija, identiteta, izomorfizmi

$$
\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend right, "g\circ f"'] & B \arrow[r, "g"] & C
\end{tikzcd}
$$

$g\circ f$ ↑ kompozitum

$$A \longrightarrow C$$
$$g\circ f : x \longmapsto g(f(x))$$

$$(g\circ f)(x) = g(f(x))$$

Asociativnost:

$$(h\circ g)\circ f = h\circ(g\circ f) \quad \checkmark$$

$$A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \xrightarrow{h} D$$

Enota za kompozitum:

<u>identiteta</u> na A: $\quad id_A : A \to A$

$$x \longmapsto x$$

$$A \xrightarrow{id_A} A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{id_B} B$$
$$f\circ id_A = f = id_B\circ f$$

Def: *Inverz* preslikave $f : A \to B$ je taka preslikava $g : B \to A$, da velja $f \circ g = id_B$ in $g \circ f = id_A$

Izomorfizem je preslikava, ki ima inverz.

Inverz preslikave f označimo z f^{-1} (kadar obstaja)