CANTOR-SCHRÖDER-BERNSTEINOV IZREK

Izrek. *Če obstajata injektivni preslikavi $f : A \to B$ in $g : B \to A$, potem obstaja bijektivna preslikava $h : A \to B$.*

Dokaz. Definirajmo družino $C : \mathbb{N} \to \mathsf{Set}$ takole:[1]

$$C_0 = A \setminus g_*(B),$$
$$C_{n+1} = g_*(f_*(C_n)).$$

Naj bo $D = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} C_n$. Očitno je $C_n \subseteq A$ za vse $n \in \mathbb{N}$, zato velja tudi $D \subseteq A$.

Ker je g injektivna, je bijekcija kot preslikava $g : B \to g_*(B)$, zato obstaja inverz $g^{-1} : g_*(B) \to B$. Trdimo, da velja $A \setminus D \subseteq g_*(B)$. Res, če velja $x \in A \setminus D$, tedaj $x \notin D$ in zato $x \notin C_0 = A \setminus g_*(B)$, od koder sledi $x \in g_*(B)$. Od tod sledi, da lahko g^{-1} uporabimo na $x \in A \setminus D$.

Definirajmo $h : A \to B$ s predpisom

$$h(x) = \begin{cases} f(x), & \text{če } x \in D, \\ g^{-1}(x) & \text{če } x \in A \setminus D. \end{cases}$$

Dokažimo, da je h injektivna preslikava. Denimo, da za $x, y \in A$ velja $h(x) = h(y)$. Obravnavamo štiri primere:

(1) Če je $x \in D$ in $y \in D$, potem je $f(x) = h(x) = h(y) = f(y)$ in zato $x = y$, saj je f injektivna.
(2) Če je $x \in A \setminus D$ in $y \in A \setminus D$, potem je $g^{-1}(x) = h(x) = h(y) = g^{-1}(y)$ in zato $x = y$, saj je g^{-1} injektivna.
(3) Če je $x \in D$ in $y \in A \setminus D$, potem je $f(x) = h(x) = h(y) = g^{-1}(y)$, zato je $y = g(g^{-1}(y)) = g(f(x))$. Obstaja $n \in \mathbb{N}$, da je $x \in C_n$, od tod pa sledi $y = g(f(x)) \in C_{n+1} \subseteq D$, kar je v protislovju z $y \in A \setminus D$. Torej se ta primer sploh ne more zgoditi.
(4) Če je $x \in A \setminus D$ in $y \in D$, je razmislek kot v prejšnjem primru, le da zamenjamo vlogi x in y.

Preveriti moramo še, da je h surjektivna preslikava. Naj bo $z \in B$. Poiskati moramo tak $x \in A$, da velja $h(x) = z$. Obravnavamo dva primera:

(1) Če $z \in f_*(D)$, potem obstaja $x \in D$, da je $f(x) = y$, s tem pa velja tudi $h(x) = f(x) = z$.
(2) Če velja $z \notin f_*(D)$, potem vzamemo $x = g(z)$. Preverimo, da velja $h(x) = z$.

    Najprej dokažimo $x \notin D$. Če bi namreč veljalo $x \in D$, potem bi obstajal $n \in \mathbb{N}$, da je $x \in C_n$. Poleg tega $x = g(z) \notin A \setminus g_*(B) = C_0$, zato velja $n > 0$. Se pravi, da obstaja $y \in C_{n-1}$, da je $g(z) = x = g(f(y))$. Ker je g injektivna, sledi $z = f(y)$, kar je v nasprotju z predpostavko $z \notin f_*(D)$. Torej res velja $x \notin D$.

    Ker $x \notin D$, velja $h(x) = g^{-1}(x) = g^{-1}(g(z)) = z$, kar smo želeli dokazati.

$\square$

[1] Za lažje razumevanje dokaza si oglejte `https://vimeo.com/117221911`.