Mreže

lattice ←
lettuce

$(P, \leq)$ delna urejenost

$S \subseteq P$

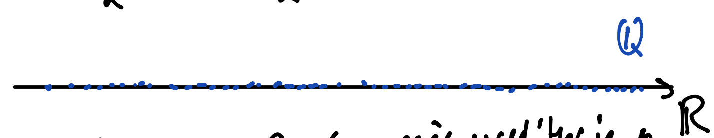
- supremum S: najmanjša zgornja meja:

  element $x \in P$, da velja:

  1. x je zgornja meja: $\forall y \in S.\ y \leq x$
  2. če je tudi $z \in P$ zgornja meja za S, potem $x \leq z$.

Supremum ne obstaja vedno:

1) $(\mathbb{R}, \leq)$, $S = \mathbb{R}$
2) $(\mathbb{Q}, \leq)$, $S = \{ q \in \mathbb{Q} \mid q^2 < 2 \wedge q > 0 \}$



v $\mathbb{Q}$ <u>ni</u> suprema S ← naša ureditev je $\mathbb{Q}$.

v $\mathbb{R}$ je supremum $\sqrt{2}$ ← irelevantno

Če S ima supremuma x in y, potem sledi: $x \leq y$ in $y \leq x$, torej $x = y$.

Oznake za supremum: $\sup S$, $\bigvee S$, $\bigvee_{x \in S} x$

$a \vee b := \sup \{a, b\}$

Za infimume: $\inf S$, $\bigwedge S$, $\bigwedge_{x \in S} x$

$a \wedge b$

Primer: $(\mathbb{N}, |)$ $\qquad 8 \vee 10 = 40$

$a \vee b$ = najmanjši skupni večkratnik

$a \wedge b$ = največji skupni delitelj

Def: Delna urejenost $(P, \leq)$ je

- mreža, če za vsaka $x, y \in P$ obstaja $x \vee y$ in $x \wedge y$
- omejena mreža če ima vsaka končna $S \subseteq P$ infimum in supremum
- polna mreža če ima vsaka podmnožica $S \subseteq P$ infimum in supremum.

Primeri:

- $(\mathbb{N}, |)$ je mreža, glej zgornji primer
- Kaj je $\sup \emptyset$? $\qquad (P, \leq)$

  Odgovor: najmanjši element P, če obstaja. $\qquad \emptyset \subseteq P$

  zgornje meje $\emptyset$ so vsi elementi P

  Kaj je $\inf \emptyset$? Največji element P, če obstaja.

  Omejena mreža ima:

  1. Najmanjši element $\perp_P$ ali 0_P
  2. Največji element $\top_P$ ali 1_P
  3. $\sup\{x_1, \dots, x_n\} = x_1 \vee (x_2 \vee (\dots \vee x_n))$

     Supremum 2 ali več elementov lahko izračunamo kar s supremumi dveh elementov

Kaj je $\inf\{a\}$? $\inf\{a\} = a$
$\sup\{a\} = a$

Podobno kot
$\text{vsota}\{a, b, c, d\} = ((a+b)+c)+d$

imamo
$\sup\{a, b, c, d\} = (((a \vee b) \vee c) \vee d$

Sklep:

Omejena mreža = mreža, ki ima največji in najmanjši element.

Primer: $(\mathbb{N}, |)$ ali je omejena mreža? Da.

- 1 je najmanjši element za deljivost
- 0 je največji element za deljivost

Primer: A množica
$(P(A), \subseteq)$ je polna mreža:

$$S \subseteq P(A)$$

- $\sup S = \bigcup S = \bigcup_{X \in S} X$
- $\inf S = \bigcap S$ če $S \neq \emptyset$
  $= A$ če $S = \emptyset$

Primer: $([0,1], \leq)$ je polna mreža.

Indukcija in dobra urejenost

Indukcija na $\mathbb{N}$: lastnost φ naravnih števil:

Če velja:

naslednik k

1. Baza: $\varphi(0)$
2. Indukcijski korak: $\forall k \in \mathbb{N}.\ \varphi(k) \Rightarrow \varphi(k^+)$

Tedaj velja $\forall n \in \mathbb{N}.\ \varphi(n)$.

Z množicami:

$$\forall S \subseteq \mathbb{N}.\ (\underbrace{0 \in S}_{\text{baza}} \wedge \underbrace{\forall k \in \mathbb{N}.\ k \in S \Rightarrow k^+ \in S}_{\text{ind. korak}}) \Rightarrow S = \mathbb{N}$$

$\Longleftrightarrow$

$$\forall S \subseteq \mathbb{N}.\ (\forall m \in \mathbb{N}.\ (\forall k \in \mathbb{N}.\ k^+ = m \Rightarrow k \in S) \Rightarrow m \in S) \Rightarrow S = \mathbb{N}$$

če so vsi predhodniki m v S,
je tudi m v S

Za $m := 0$ dobimo

$$(\forall k \in \mathbb{N}.\ \underbrace{\overbrace{k^+ = 0}^{\perp} \Rightarrow k \in S}_{\top}) \Rightarrow 0 \in S \quad \Longleftrightarrow$$

$$(\forall k \in \mathbb{N}.\ \top) \Rightarrow 0 \in S \quad \Longleftrightarrow$$

$$\top \Rightarrow 0 \in S \quad \Longleftrightarrow \quad (\top \Rightarrow p) \Leftrightarrow p$$

$$0 \in S$$

Za $m := \ell^+$ dobimo

$$\left(\forall k \in \mathbb{N}.\ \underbrace{k^+ = l^+}_{k=l} \Rightarrow k \in S\right) \Rightarrow l^+ \in S \qquad \Longleftrightarrow$$

$$l \in S \Rightarrow l^+ \in S$$

Krepka indukcija na $\mathbb{N}$:

$$\Big(\forall n \in \mathbb{N}.\big(\forall k \in \mathbb{N}.\ k < n \Rightarrow \varphi(k)\big) \Rightarrow \varphi(n)\Big) \Rightarrow \forall m \in \mathbb{N}.\varphi(m)$$

z množicami:

$$\forall S \subseteq \mathbb{N}.\Big(\forall n \in \mathbb{N}.\ \big(\forall k \in \mathbb{N}.\ k < n \Rightarrow k \in S\big) \Rightarrow n \in S\Big) \Rightarrow S = \mathbb{N}.$$

Sorry, pozabil sem shemati...

Dobra osnovanost

<u>Def</u>: Relacija $R \subseteq A \times A$ je <u>dobro osnovana</u>, če velja:

$$\forall S \subseteq A.\Big(\big(\forall x \in A.\ (\forall y \in A.\ y R x \Rightarrow y \in S) \Rightarrow x \in S\big) \Rightarrow S = A$$

Množica $S \subseteq A$ pogoju

$$\forall x \in A.\ (\forall y \in A.\ y R x \Rightarrow y \in S) \Rightarrow x \in S$$

pravimo R-<u>progresivna</u>.

<u>Primer</u>: Dvojiška drevesa

množica vseh dreves

Množica dvojiških dreves Tree je definirana induktivno s pravili:

1) empty $\in$ Tree

eno drevo

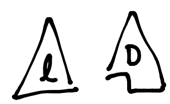
2) če $l, d \in$ Tree, potem tree$(l,d) \in$ Tree

1) $0 \in \mathbb{N}$

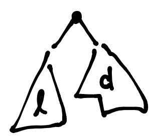
2) če $n \in \mathbb{N}$, potem $n^+ \in \mathbb{N}$

Rišemo:

empty

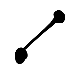


tree(l,d)

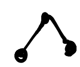


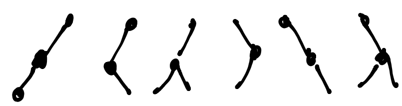
Generiramo drevesa:

- tree(empty, empty)

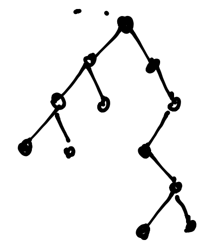


tree(tree(empty, empty), empty)





...



Neposredna predhodnika drevesa

tree(l,d)

sta drevesi l in d.

Indukcija na dvojiških drevesih:

Denimo, da velja:

1) Baza: $\varphi(\text{empty})$

2) Indukcijski korak:

$\forall l, d \in \text{Tree}.\ \varphi(l) \wedge \varphi(d) \Rightarrow \varphi(\text{tree}(l,d))$

Potem velja $\forall t \in \text{Tree}.\ \varphi(t)$.

Def: <u>Padajoča veriga</u> za relacijo $R \subseteq A \times A$ je zaporedje $a : \mathbb{N} \to A$, za katero velja

$$\dots R\, a_2\, R\, a_1\, R\, a_0$$

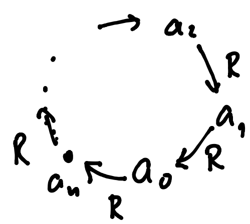
Oziroma: $\forall n \in \mathbb{N}.\ a_{n+1}\, R\, a_n$

Primer: Padajoče verige za $<$ na $\mathbb{R}$ je strogo padajoče zaporedje:

$$\dots < a_3 < a_2 < a_1 < a_0$$

Cikel je podmnožica $\{a_0, a_1, \dots, a_n\}$ da velja

$$a_0\, R\, a_n\, R \dots R\, a_2\, R\, a_1\, R\, a_0$$



Iz cikla dobimo padajočo verigo:

$$\dots R\, a_0\, R\, a_n\, R \dots R\, a_0\, R\, a_n\, R \dots R\, a_0$$

Lema: Dobra osnovanost nima ciklov in nima padajočih verig.

Stroga urejenost

<u>Def</u>: Relacija $R \subseteq A \times A$ je <u>stroga urejenost</u> če:

1. irefleksivna: $\forall x \in A \,.\, \neg (xRx)$
2. tranzitivna

Stroga urejenost je <u>linearna</u> če

3. sovisna: $\forall x,y \in A.\ xRy \vee x=y \vee yRx$.

Uporabljamo oznake: $<, \sqsubset, \subset, \prec$

Če imamo delno urejenost $(P, \leq_P)$, lahko definiramo strogo urejenost

$$x <_P y \iff x \leq_P y \wedge x \neq y$$

Obratno:

$$x \leq_P y \iff x <_P y \vee x = y$$

ureditev množice P

$$\underbrace{(P, \leq_P)}_{\text{struktura urejenosti}}$$

Primeri: $(\mathbb{R}, <)$

$(\mathbb{R}, >)$

$(P(A), \subsetneq)$

Dobra ureditev

<u>Def</u>: Relacija je <u>dobra ureditev</u>, če je

1. dobro osnovana
2. stroga linearna ureditev.

Izrek: $R \subseteq A \times A$ je dobra ureditev $\Leftrightarrow$
R je dobro osnovana in sovisna.

Izrek: Naj bo $\sqsubset$ stroga urejenost na A.
Ekvivalentne so izjave:

porejen z $\sqsubset$

1. $\sqsubset$ je dobro osnovana
2. vsaka <u>neprazna</u> $S \subseteq A$ ima $\sqsubseteq$-minimalni element.
3. A nima padajoce verige glede na $\sqsubset$

Izrek: Naj bo $\sqsubset$ stroga urejenost na A.
Ekvivalentne so izjave:

1. $\sqsubset$ je dobra ureditev
2. vsaka <u>neprazna</u> $S \subseteq A$ ima $\sqsubset$-prvi element:
   tak $x \in S$, da velja $\forall y \in S.\ x \neq y \Rightarrow x \sqsubset y$.
3. A nima padajoce verige glede na $\sqsubset$ in $\sqsubseteq$ je sovisna.