Relacije urejenosti

<u>Def</u>: Relacija $R \subseteq A \times A$ je

- <u>šibka urejenost</u>, če je refleksivna in tranzitivna
- <u>delna urejenost</u>, če je refleksivna, tranzitivna, antisimetrična

  $\forall x, y \in A \,.\, xRy \wedge yRx \Rightarrow x = y$
- <u>linearna urejenost</u>, če je delna urejenost in je sovisna

  $\forall x, y \in A \,.\, xRy \vee yRx$

Relacije urejenosti označujemo: $\leq, \subseteq, \sqsubseteq, \precsim$
$\geq, \supseteq, \sqsupseteq, \succsim$

<u>Primeri</u>:

1) Ljudje urejeni po starosti:

   $x R y \Leftrightarrow$ x mlajši ali enako star od y

   $\text{starost}(x) \leq \text{starost}(y)$

   šibka ✓ ni delna (ni antisimetrična)

2) Deljivost $|$ na $\mathbb{N}$

   $m \mid n$ "m deli n" delna ✓

   $\Updownarrow$

   $\exists k \in \mathbb{N} \,.\, n = k \cdot m$ ni linearna, ker $5 \nmid 3$ in $3 \nmid 5$

3) Deljivost $|$ na $\mathbb{Z}$:

   šibka ✓ ni delna ker antisimetričnost ne velja: $2 \mid -2$ in $-2 \mid 2$ in $2 \neq -2$

$m \mid n \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z} \,.\, n = m \cdot k$

4) Običajna relacija $\leq$ na $\mathbb{R}$ je linearna

$\geq$ na $\mathbb{R}$ linearna

$<$ na $\mathbb{R}$ ni refleksivna, ni šibka

5) Relacija $=$ na množici A:

$xRy \wedge yRx \Rightarrow x=y$

$x=y \wedge y=x \Rightarrow x=y$?

je delna

linearna v primeru $A=\emptyset$ ali A je enojec

6) Relacija $\subseteq$ na $\mathcal{P}(A)$:

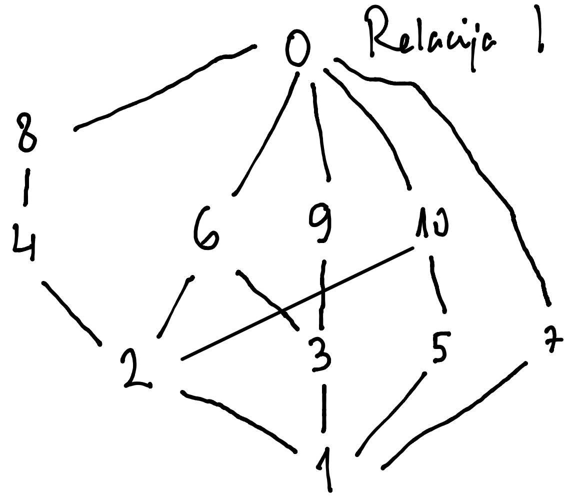
- je delna
- linearna?
  - $\mathcal{P}(\emptyset) = \{\emptyset\}$ linearna
  - $\mathcal{P}(1) = \{\emptyset, \{0\}\}$ linearna
  - $\mathcal{P}(A)$ in A ima $a,b \in A$ taka da $a \neq b$:

    $\mathcal{P}(A)$ ni linearno urejena ker

    $\{a\} \not\subseteq \{b\}$ in $\{b\} \not\subseteq \{a\}$

<u>Hassejev diagram</u> delne ureditve

Relacija $|$ na $\{0,1,2,\dots,10\}$



Hassejev diagram linearne ureditve:

$|$ na $\{1,2,4,8,16\}$

$$\begin{array}{c} 16 \\ | \\ 8 \\ | \\ 4 \\ | \\ 2 \\ | \\ 1 \end{array}$$

diagram je linearen (navpična črta)

Konstrukcije urejenosti

transponirana relacija

$x \bar{R} y \Leftrightarrow y R x$

Obratna urejenost

$\sqsubseteq$ delna urejenost na P

Obratna urejenost je transponiranka $\sqsubseteq$, $\to$ $\bar{\sqsubseteq}$ čudno $\to$ $\sqsupseteq$

t.j. relacija $\sqsupseteq$ na P definirana

$$x \sqsupseteq y \Leftrightarrow y \sqsubseteq x.$$

Če $\sqsubseteq$ delna, tudi $\sqsupseteq$ delna

linearna ... linearna.

Produktna in leksikografska urejenost

Naj bosta $(P, \leq_P)$ in $(Q, \leq_Q)$ delni urejenosti.

Na množici $P \times Q$ lahko definiramo:

1. <u>Produktna ureditev</u> : za $x_1, x_2 \in P$ in $y_1, y_2 \in Q$

$$(x_1,y_1) \leq_{P\times Q} (x_2,y_2) \iff x_1 \leq_P x_2 \wedge y_1 \leq_Q y_2$$

2. <u>Leksikografska ureditev</u> : NAROBE! Glej popravek spodaj.

$$(x_1,y_1) \sqsubseteq (x_2,y_2) \iff x_1 \leq_P x_2 \vee (x_1 = x_2 \wedge y_1 \leq_Q y_2)$$

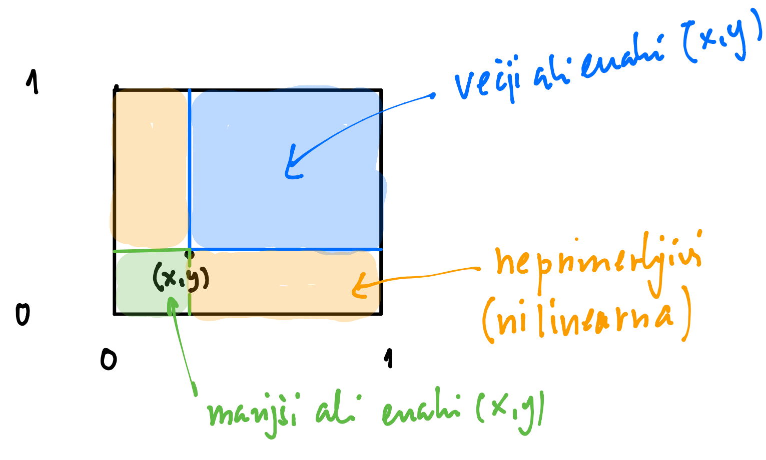
Kako je z linearnostjo?

$(P, \leq_P)$ in $(Q, \leq_Q)$ linearni $\implies$ $\leq_{P\times Q}$ ni nujno linearna

$\implies$ $\sqsubseteq$ je linearna (dokaz!)

Hassejev diagram: $([0,1], \leq)$ in $([0,1], \leq)$

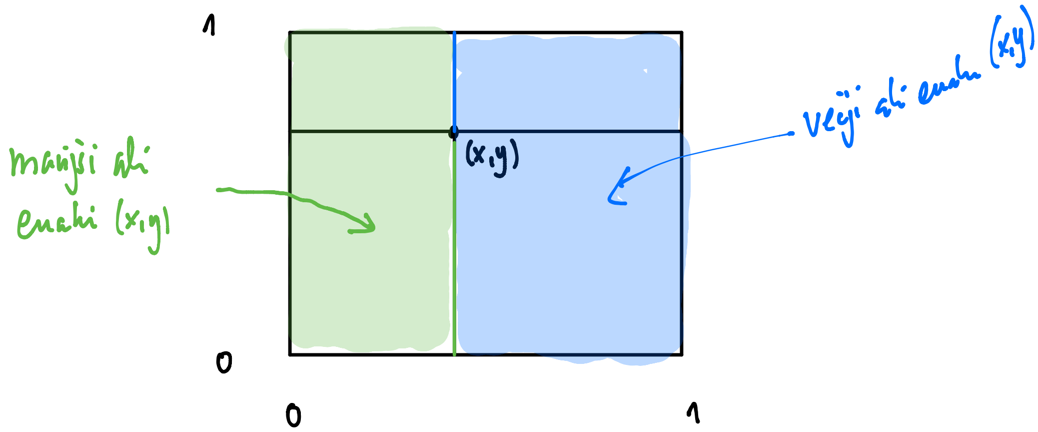
$[0,1] \times [0,1]$ produktna urejenost?



Leksikografska:

$$(x_1,y_1) \sqsubseteq (x_2,y_2) \iff (x_1 \neq x_2 \wedge x_1 \leq x_2) \vee (x_1 = x_2 \wedge y_1 \leq y_2)$$

Hassejev diagram za leksikografsko ureditev $[0,1]\times[0,1]$:



Potenca urejenosti

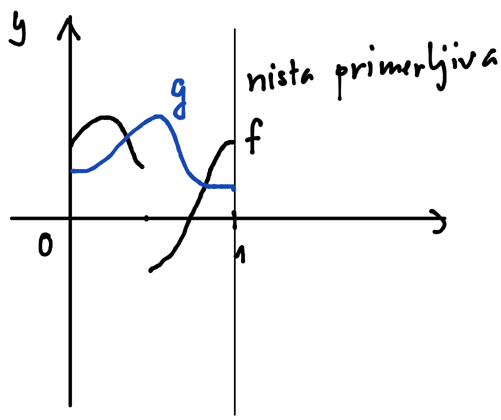
Imamo $(P, \leq_p)$ delna urejenost in A množica.
Na P^A (A-ta potenca P) definiramo ureditev $\sqsubseteq$ "po točkah":

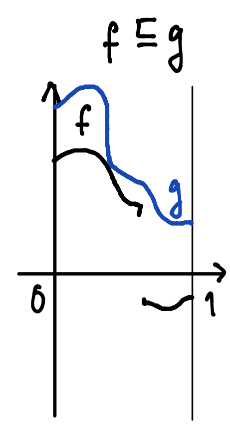
$$f \sqsubseteq g \iff \forall x \in A.\ f(x) \leq_p g(x)$$

Če $\leq_p$ delna, potem $\sqsubseteq$ tudi delna.

Primer: $(\mathbb{R}, \leq)$ in $\mathbb{R}^{[0,1]}$

linearnost se ne ohrani





Delna urejenost porojena s šibko

Naj bo $(P, \leq)$ šibka ureditev (refleksivna, tranzitivna).

Definiramo $\sim$ na P s predpisom

$$x \sim y \iff x \leq y \wedge y \leq x$$

Ali je $\sim$ ekvivalenca? Refleksivna ✓ ker $\leq$ refleksivna

Tranzitivna? ✓ ker $\leq$ tranzitivna

$$x \sim y \wedge y \sim z \implies x \sim z$$

Simetrična ✓ ker $\wedge$ simetrična

$$\begin{aligned} x \sim y &\iff x \leq y \wedge y \leq x \\ &\iff y \leq x \wedge x \leq y \\ &\iff y \sim x . \end{aligned}$$

Na kvocientu $P/_\sim$ definiramo $\sqsubseteq$ s predpisom

$$[x]_\sim \sqsubseteq [y]_\sim \iff x \leq y$$

Premisli: predpis ni odvisen od izbire predstavnikov x in y

Tedaj je $\sqsubseteq$ je delna ureditev:

antisimetrična?

$$\begin{aligned} [x]_\sim \sqsubseteq [y]_\sim \wedge [y]_\sim \sqsubseteq [x]_\sim &\iff \\ x \leq y \quad \wedge \quad y \leq x &\iff \\ x \sim y &\iff \\ [x]_\sim = [y]_\sim & \quad ✓ \end{aligned}$$

Monotone preslikave

<u>Def</u>: Naj bosta $(P, \leq_P)$ in $(Q, \leq_Q)$ delni urejenosti.
Preslikava $f : P \to Q$ je <u>monotona</u> (<u>naraščajoča</u>), ko:

$$\forall x, y \in P.\ x \leq_P y \Rightarrow f(x) \leq_Q f(y)$$

Preslikava je <u>antitona</u> (<u>padajoča</u>), ko:

$$\forall x, y \in P.\ x \leq_P y \Rightarrow f(y) \leq_Q f(x).$$

V analizi: "monotona" pomeni "monotona ali antitona".

<u>Izrek</u>: Identiteta $id_P : P \to P$ na $(P, \leq_P)$ je monotona.
Kompozitum monotonih preslikav je monotona preslikava.

<u>Primeri</u>:

- konstantne preslikave so monotone

  $f : P \to Q$ je konstantna, če $\exists c \in Q\ \forall x \in P.\ f(x) = c$

- Seštevanje $+ : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

  1) $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ produktna urejenost, $(\mathbb{R}, \leq)$

  $$(x_1, y_1) \leq (x_2, y_2) \overset{?}{\Longrightarrow} x_1 + y_1 \leq x_2 + y_2$$

  $$\Updownarrow$$

  $$x_1 \leq x_2 \wedge y_1 \leq y_2$$

  ✓ monotona

  2) $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ leksikografsko? $(\mathbb{R}, \leq)$

3) Integral je monotona operacija. Kaj sploh prof. hoče?

- Množenje: ali je monotono glede na produktno ureditev

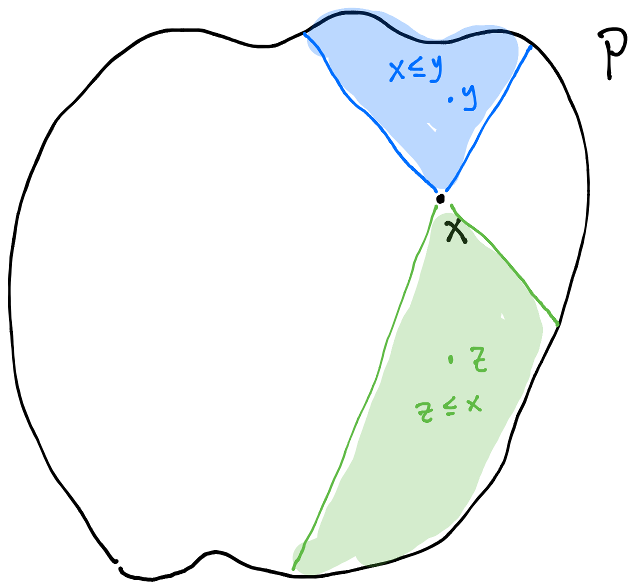
$$x_1 \leq x_2 \wedge y_1 \leq y_2 \overset{?}{\Longrightarrow} x_1 y_1 \leq x_2 \cdot y_2$$

$$-2 \leq -1 \wedge -4 \leq -3 \quad \text{vendar} \quad 8 \nleq 3$$

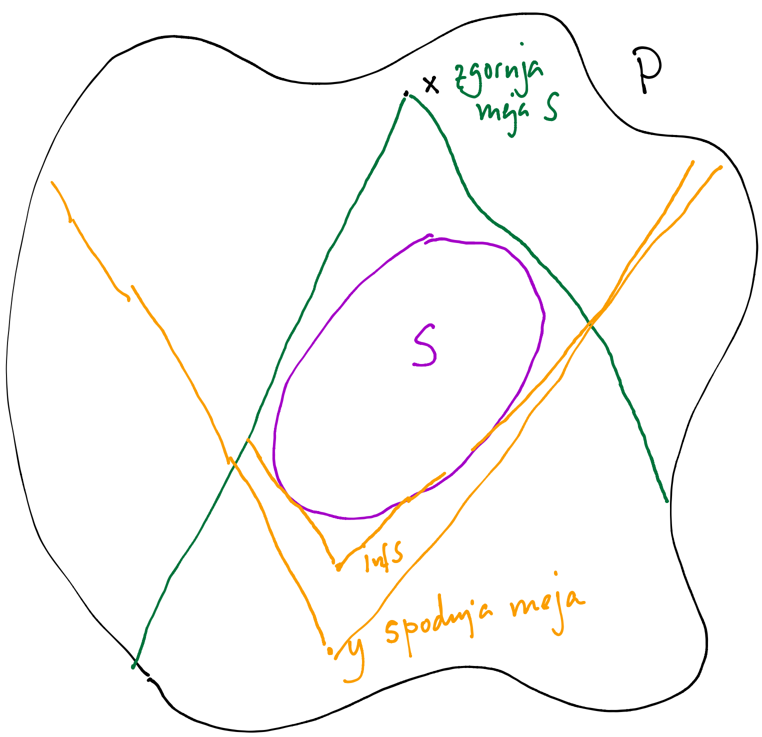
Meje

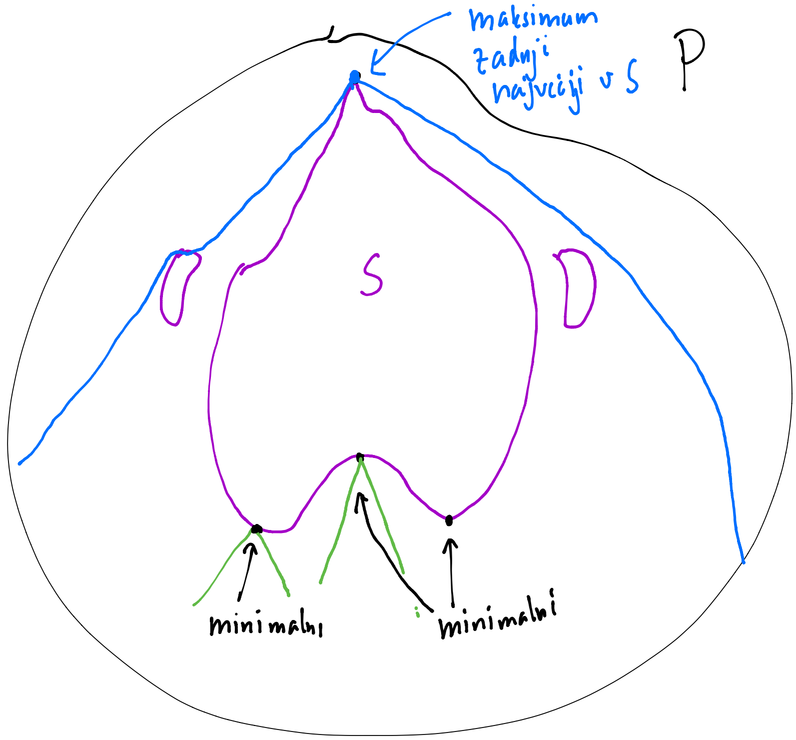
Definicija: Naj bo `(P, ≤)` delna urejenost, `S ⊆ P` in `x ∈ P`:

- `x` je **spodnja meja** podmnožice `S`, ko velja `∀ y ∈ S . x ≤ y`
- `x` je **zgornja meja** podmnožice `S`, ko velja `∀ y ∈ S . y ≤ x`
- `x` je **infimum** ali **največja spodnja meja** ali **natančna spodnja meja** podmnožice `S`, ko je spodnja meja `S` in velja: za vse `y ∈ P`, če je `y` spodnja meja `S`, potem je `y ≤ x`
- `x` je **supremum** ali **najmanjša zgornja meja** ali **natančna zgornja meja** podmnožice `S`, ko je zgornja meja `S` in velja: za vse `y ∈ P`, če je `y` zgornja meja `S`, potem je `x ≤ y`
- `x` je **minimalni element** podmnožice `S`, ko velja `x ∈ S` in `∀ y ∈ S . y ≤ x ⇒ x = y`
- `x` je **maksimalni element** podmnožice `S`, ko velja `x ∈ S` in `∀ y ∈ S . x ≤ y ⇒ x = y`
- `x` je **najmanjši** ali **prvi** element ali **minimum** podmnožice `S`, ko velja `x ∈ S` in `∀ y ∈ S . x ≤ y`
- `x` je **največji** ali **zadnji** element ali **maksimum** podmnožice `S`, ko velja `x ∈ S` in `∀ y ∈ S . y ≤ x`



$S \subseteq P$




maksimum
zadnji
največji v S
P
S
minimalni
minimalni