Ekvivalenčne relacije

<u>Def</u>: Relacija $E \subseteq A \times A$ je <u>ekvivalenca</u>, če je refleksivna, tranzitivna in simetrična.
Če velja $x E y$, pravimo, da sta x in y <u>ekvivalentna</u> (glede na E).

Ekvivalenčne relacije običajno označujemo s simboli
$\cong$, $\simeq$, $\approx$, $\sim$, $\equiv$

<u>Primeri</u>:

1. Ali je $\emptyset \subseteq A \times A$ ekvivalenca?

   Simetrična ✓
   tranzitivna ✓
   refleksivna: $\forall x \in A .\, (x,x) \in \emptyset$
   $\forall x \in A .\, \bot$
   Samo v primeru $A = \emptyset$

2. Ali je polna relacija ekvivalenca? Da.

3. Diagonala $\Delta_A \subseteq A \times A$, t.j. relacija enakosti na A,

   $$\Delta_A = \{ (x,y) \in A \times A \mid x = y \} \quad ✓$$

   ekvivalenca

4. Vzporednost premic? ✓

5. Relacija $\leq$ na $\mathbb{R}$? ✗ ker ni simetrična

6. Podobnost trikotnikov? ✓

7. Izomorfizem množic?

Da, vendar je $\cong$ relacija na pravem razredu:

$$\cong \; := \{ (A,B) \in Set \times Set \mid A \text{ in } B \text{ izomorfna} \}$$

<u>Def</u>: Naj bo $f: A \to B$. Na A definiramo relacijo $\sim_f$:

$$x \sim_f y \iff f(x) = f(y).$$

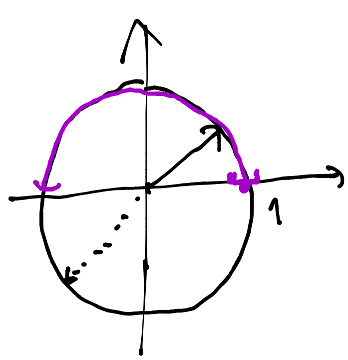
Tedaj je $\sim_f$ ekvivalenca. Pravimo ji ekvivalenčna relacija <u>porojena</u> (<u>inducirana</u>) s preslikavo f.

<u>Primer</u>: Ali je vzporednost premic porojena s kakšno preslikavo?

$$f : P \longrightarrow V$$

P → množica vseh premic

V → množice vektorjev



$f(p) :=$ smerni vektor premice p

- normiran
- v zgornji polravnini ali na pozitivnem delu osi x

Ekvivalenčni razredi

Naj bo $E \subseteq A \times A$ ekvivalenca, $x \in A$.

Ekvivalenčni razred x je

$$[x]_E := \{ y \in A \mid x E y \}$$

Kvocientna množica (kvocient, faktorska množica)

$$A/_E := \{ [x]_E \in \mathcal{P}(A) \mid x \in A \}$$
$$:= \{ \xi \in \mathcal{P}(A) \mid \exists x \in A .\ \xi = [x]_E \}$$

Kanonična kvocientna preslikava

$$q_E : A \longrightarrow A/E$$
$$x \longmapsto [x]_E$$

Izrek: Vsaka ekv. relacija je porojena s svojo kanonično kvocientno preslikavo.

Dokaz: $E \subseteq A \times A$ ekvivalenca. Preverimo:

$$x E y \Leftrightarrow q_E(x) = q_E(y)$$
$$[x]_E = [y]_E$$

$\boxed{\Rightarrow}$ Predp. $\underset{(1)}{\underline{x E y}}$. Dokazujemo $[x]_E = [y]_E$.

1. $[x]_E \subseteq [y]_E$:

$z \in [x]_E \Leftrightarrow \underset{(2)}{x E z}$

Sledi: $z E x$ (3) (simetričnost$^{(2)}$)

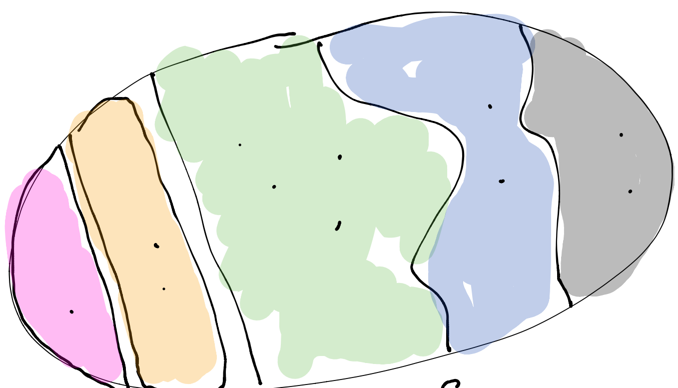
$z E y$ (tranz. (1) in (3))

$z \in [y]_E$ ✓

2. $[y]_E \subseteq [x]_E$: dokaz podoben

$\boxed{\Leftarrow}$ zapiši. $\blacksquare$

Razdelitev ali particija množice



A

Razdelitev je množica S podmnožic A da velja

$S \subseteq P(A)$

1) $\bigcup S = A$ — S je pokritje množice A

2) $\forall B \in S.\ B \neq \emptyset$ — so neprazne

3) $\forall B, C \in S.\ B = C \lor B \cap C = \emptyset$ — paroma disjunktne

$\bigcup S = \{ x \in A \mid \exists B \in S.\ x \in B \} = \bigcup_{B \in S} B$

Izrek: Ekvivalenčni razredi ekv. relacije $E \subseteq A \times A$ tvorijo razdelitev A.

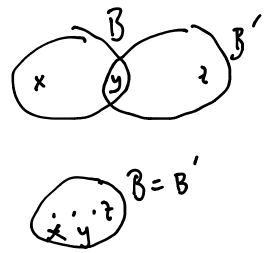
Vsaka razdelitev $S \subseteq \mathcal{P}(A)$ določa ekvivalenčno relacijo $\sim_S$

$$x \sim_S y \iff \exists B \in S.\ x \in B \land y \in B.$$

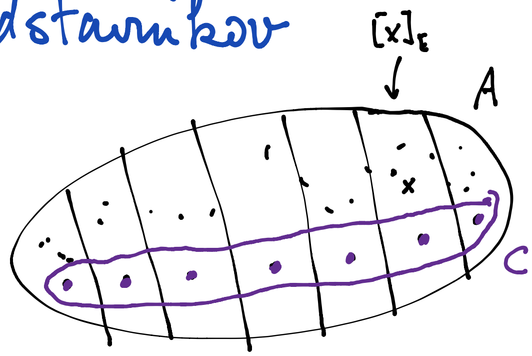
Tranzitivnost

$$\underset{B}{x \sim_S y} \underset{B'}{\sim_S z}$$

$$\Rightarrow B = B'$$



Prerez ekvivalenčne relacije, izbor predstavnikov



<u>Izbor predstavnikov</u> za $E \subseteq A \times A$ je množica

$C \subseteq A$, da je $C \cap \xi$ enojec za vsak $\xi \in A/E$.

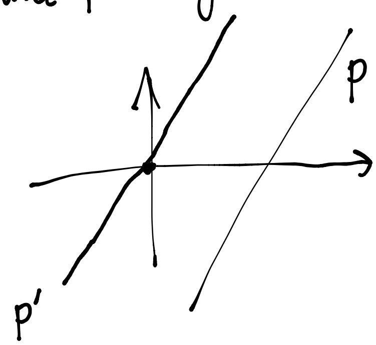
Torej C vsebuje po en predstavnik vsakega ekvivalenčnega razreda.

Primer: Vzporednost premic

A množica vseh premic v ravnini

$p \parallel q$ vzporednost

Izbor: premice, ki gredo skozi izhodišče



Naj bo $E \subseteq A \times A$ ekvivalenca.

$$\begin{aligned} q_E : A &\longrightarrow A/E \\ x &\longmapsto [x]_E \end{aligned}$$

je surjektivna

$$X \underset{s}{\overset{r}{\rightleftarrows}} Y$$

$r \circ s = id_Y$

r retrakcija, epi

s prerez, mono

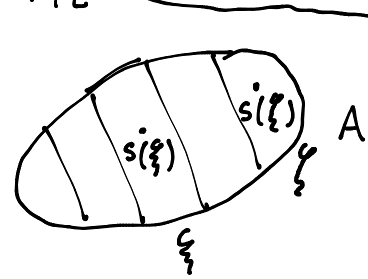
Kaj je desni inverz q_E?

To je $s : A/E \to A$, da velja $q_E \circ s = id_{A/E}$:

$$q_E(s(\xi)) = \xi \quad \text{za } \xi \in A/E$$

$$[s(\xi)]_E = \xi$$

s iz vsakega ekvivalenčnega razreda izbere element.



Dva pogleda na izbor predstavnikov:

1. $C \subseteq A$, da je $C \cap \xi$ enojec za $\xi \in A/E$.

2. Desni inverz q_E, $s : A/E \to A$, $q_E \circ s = id_{A/E}$

$$C := s_*(A/E) = \{ s(\xi) \mid \xi \in A/E \}$$

$$s(\xi) = \text{tisti } x \in A, \text{ za katerega je } x \in C \cap \xi$$
$$= \iota x \in A \,.\, x \in C \cap \xi$$

Ali ima vsaka ekvivalenčna relacija izbor?

<u>Izrek</u>: Naslednje izjave so ekvivalentne.

1. Vsaka surjektivna preslikava ima desni inverz (prerez)
2. Vsaka ekv. relacija ima izbor predstavnikov.
3. Vsaka družina nepraznih množic ima funkcijo izbire.
4. Produkt družine nepraznih množic je neprazen.

<u>Aksiom izbire</u>: Vsaka družina nepraznih množic ima funkcijo izbire.

Univerzalna lastnost kvocientov

$$\begin{tikzcd} A \arrow[rr, "f"] \arrow[d, "q_E"'] & & B \\ A/E \arrow[rru, phantom, ""] \arrow[rr, "\bar{f}"'] & & B \end{tikzcd}$$

Imamo $f : A \to B$.
Radi bi definirali
$$\bar{f} : A/E \to B$$
s predpisom
$$\bar{f}([x]_E) := f(x).$$

Ali je $\bar{f}$ dobro definirana?

Def: Preslikava $f : A \to B$ je <u>skladna</u> (<u>kongruenca</u>) z ekv. relacijo $E \subseteq A \times A$, kadar velja
$$x \mathrel{E} y \Rightarrow f(x) = f(y) \quad \text{za vse } x, y \in A.$$

Pravimo: f <u>spoštuje</u> E.

Izrek: Če je f skladna z E, potem obstaja natanko ena preslikava $\bar{f} : A/E \to B$, da je $f = \bar{f} \circ q_E$.

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "q_E"'] & B \\ A/E \arrow[ru, "\bar{f}"'] & \end{tikzcd}$$

Se pravi:
$$\bar{f}([x]_E) = f(x)$$

Kanonični razcep preslikave

$$
\begin{tikzcd}
A \arrow[rrr, "f"] \arrow[dr, "q_f"'] & & & B \\
& A/{\sim_f} \arrow[r, "b_f"] & f_*(A) \arrow[ur, "i_f"'] &
\end{tikzcd}
$$

$f_*(A) \subseteq B$

$i_f(y) = y$

$q_f = q_{\sim_f}$

$$b_f([x]_{\sim_f}) := f(x)$$

Velja: $f = i_f \circ b_f \circ q_f$

- i_f je injektivna
- b_f je bijektivna
- q_f je surjektivna