Relacije

Predikati

P je predikat na A.

Za $x \in A$: ali x zadošča P? Pišemo $P(x)$

"x zadošča P"

Primer: Na $\mathbb{N}$ imamo predikat "je sodo število"

Predikat P lahko podamo:

- z logično formulo, npr.

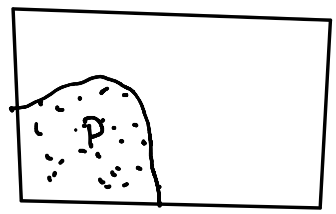
$$P(n) := \underbrace{\exists k \in \mathbb{N} .\, n = 2k}_{\text{"n je sodo število"}}$$

- z resničnostno tabelo (na končni množici)

n	$P(n)$
0	$\top$
1	$\bot$
2	$\top$
3	$\bot$
4	$\top$
5	$\bot$
$\vdots$	$\vdots$

Predikat P na množici A kot matematični objekt je:

1. Preslikava $P: A \to 2$, karakteristična preslikava P
2. Podmnožica $P \subseteq A$, ekstenzija P



A

Relacije

Relacija je veččleni predikat, se pravi predikat R na $A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n$.
Pravimo, da je R <u>n-členа</u> relacija na $A_1, \dots, A_n$.

1. $R : A_1 \times \cdots \times A_n \to 2$
2. $R \subseteq A_1 \times \cdots \times A_n$

Pišemo:

$(x_1, \dots, x_n) \in R$ elementi $x_1 \dots x_n$ so v relaciji R

$R(x_1, \dots, x_n)$

<u>Primeri</u>:

(a) "točke A, B in C so kolinearne"

tričlena relacija med točkami ravnine

(b) "točka A leži med točkama B in C"

$A \in \overline{BC}$ A leži na daljici $\overline{BC}$

(c) <u>Prazna relacija</u> $\emptyset \subseteq A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n$

(d) <u>Polna relacija</u> $A_1 \times \cdots \times A_n \subseteq A_1 \times \cdots \times A_n$

Najpogostejše v praksi so dvočlene relacija

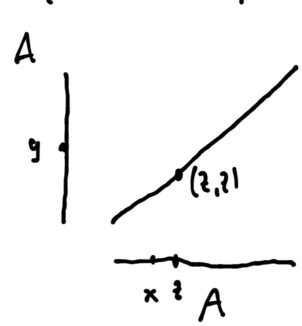
$$\underset{\text{domena}}{R \subseteq A} \times \underset{\text{kodomena}}{B}$$

R je relacija na A:

$$R \subseteq A \times A$$

<u>Primer</u>: <u>Diagonala</u> ali <u>enakost</u> na A:

$$\Delta_A := \{(x,y) \in A \times A \mid x = y\}$$
$$= \{(x,x) \mid x \in A\}$$



Dvočlene relacije:

$(x,y) \in R$

$R(x,y)$

$x\,R\,y$ $\longrightarrow$ pogost, ko za R uporabimo

$<, \leq, \geq, \subseteq, \approx, \cong, \neq$

[infiksni]

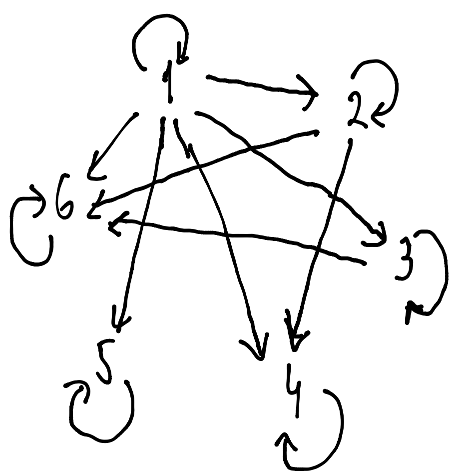
Primer: "p in q sta vzporedni premici" $p \parallel q$

$(p,q) \in \parallel$

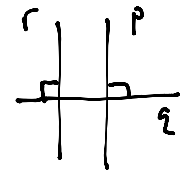
$\parallel(p,q)$

$<(x,y^2)$ $\quad$ $(x,y^2) \in <$

Relacija kot graf: Relacija "x deli y" na $\{1,2,3,4,5,6\}$



LASTNOSTI RELACIJ



Za relacijo $R \subseteq A \times A$ pravimo da je:

- **refleksivna:** $\forall\, x \in A \,.\, x \mathrel{R} x$
- **simetrična:** $\forall\, x, y \in A \,.\, x \mathrel{R} y \Rightarrow y \mathrel{R} x$
- **antisimetrična:** $\forall\, x, y \in A \,.\, x \mathrel{R} y \land y \mathrel{R} x \Rightarrow x = y$
- **tranzitivna:** $\forall\, x, y, z \in A \,.\, x \mathrel{R} y \land y \mathrel{R} z \Rightarrow x \mathrel{R} z$
- **irefleksivna:** $\forall\, x \in A \,.\, \neg (x \mathrel{R} x)$
- **asimetrična:** $\forall\, x\, y \in A \,.\, x \mathrel{R} y \Rightarrow \neg (y \mathrel{R} x)$
- **sovisna:** $\forall\, x\, y \in A \,.\, x \neq y \Rightarrow x \mathrel{R} y \lor y \mathrel{R} x$
- **strogo sovisna:** $\forall\, x\, y \in A \,.\, x \mathrel{R} y \lor y \mathrel{R} x$

Operacije na relacijah

$R, S \subseteq A \times B$

- $x\, (R \cup S)\, y \Leftrightarrow x \mathrel{R} y \lor x \mathrel{S} y$
- $x\, (R \cap S)\, y \Leftrightarrow x \mathrel{R} y \land x \mathrel{S} y$
- $x \mathrel{R^c} y \Leftrightarrow \neg (x \mathrel{R} y)$

R^c komplement

$< \cup > = \neq$

Transponirana relacija:

$$R \subseteq A \times B$$

transponiranka $R^T \subseteq B \times A$

$$y \mathrel{R^T} x \Leftrightarrow x \mathrel{R} y$$

$$R^T := \{ (y, x) \in B \times A \mid x \mathrel{R} y \}$$

Primer: $x \leq^{T} y \iff y \leq x$

$$\leq^{T} \; = \; \geq$$

Kompozitum relacij

$$R \subseteq A \times B \qquad S \subseteq B \times C$$

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "R", "|" marking] \arrow[rr, bend right, "S \circ R"', "|" marking] & B \arrow[r, "S", "|" marking] & C \end{tikzcd}$$

$$x \qquad\qquad\qquad\qquad z$$

$$x \, (S \circ R) \, z \iff \exists y \in B .\, x R y \wedge y S z$$

$$S \circ R := \{ (x,z) \in A \times C \mid \exists y \in B .\, (x,y) \in R \wedge (y,z) \in S \}$$

Primer: "z je mati od y" $=: S(y,z)$

"x je otrok od y" $=: R(x,y)$

$(S \circ R)(x,z)$ "z je babica od x"

Izrek: 1. Kompozitum relacij je asociativen

$$T \circ (S \circ R) = (T \circ S) \circ R$$

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "R", "|" marking] & B \arrow[r, "S", "|" marking] & C \arrow[r, "T", "|" marking] & D \end{tikzcd}$$

2. Diagonala je enota za kompozicijo:

$$\Delta_B \circ R = R = R \circ \Delta_A$$

Potenciranje relacij:

$\boxed{f^{(n)} \text{ odvod}}$

- funkcije $f : A \to A$ $\quad f^n := \underbrace{f \circ f \circ f \circ \dots \circ f}_{n} : A \to A$

n-ta potenca f

$f^0 = id_A$

$R \subseteq A \times A$

$R^n := \underbrace{R \circ R \circ \dots \circ R}_{n} \subseteq A \times A$

$R^1 = R \qquad R^3 = R \circ R \circ R$

$R^0 = \Delta_A$

Primer: $R(x,y) =$ "x je otrok od y"

R^4 prapravnuk

Funkcijske relacije

$f : A \longrightarrow B$

domena kodomena

prirejanje je relacija med A in B

Def: Relacija $R \subseteq A \times B$ je <u>funkcijska</u>, če je

1. <u>Celovita</u>: $\forall x \in A . \exists y \in B . \, x R y$
2. <u>Enolična</u>:

$$\forall x \in A . \forall y_1, y_2 \in B . \, x R y_1 \land x R y_2 \Rightarrow y_1 = y_2$$

Združimo:

$$(1) \,\&\, (2) \iff \forall x \in A . \exists! y \in B . \, x R y$$

Vsaka funkcija $f : A \to B$ določa relacijo

$\Gamma_f := \{ (x,y) \in A \times B \mid f(x) = y \}$ <u>graf</u> funkcije f

Γ_f je funkcijska relacija

Vsaka funkcijska relacija $R \subseteq A \times B$ določa funkcijo

$$\begin{aligned} \varphi_R : A &\to B \\ x &\mapsto \iota y \in B . \, x R y \end{aligned}$$

"tisti $y \in B$, ki ga R priredi x"

$$\Gamma_{\varphi_R} = R \qquad \varphi_{\Gamma_f} = f$$

$$B^A \underset{\Gamma}{\overset{\varphi}{\cong}} \{ R \in P(A \times B) \mid R \text{ je funkcijska} \}$$

Izjava: $\Gamma_{g\circ f} = \Gamma_g \circ \Gamma_f$

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend right, "g\circ f"'] & B \arrow[r, "g"] & C \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} A \arrow[r, "\Gamma_f"] \arrow[rr, bend right, "\Gamma_{g\circ f}"'] & B \arrow[r, "\Gamma_g"] & C \end{tikzcd}$$

Ovojnice relacij

$R \subseteq A \times A$

Def: Tranzitivna ovojnica relacije $R \subseteq A \times A$ je taka relacija $S \subseteq A \times A$, da velja:

1. $R \subseteq S$
2. S je tranzitivna
3. Za vsako tranzitivno relacijo $T \subseteq A \times A$ velja: če $R \subseteq T$ potem je $S \subseteq T$

- Ali ima vsaka relacija tranzitivno ovojnico? DA
- Ali je lahko več ovojnic? NE.

Tranzitivno ovojnico označimo z R^+

$$R^+ := \bigcap \{ S \subseteq A \times A \mid R \subseteq S \land S \text{ je tranzitivna} \}$$

$$R^+ := \bigcup_{n \geq 1} R^n = R \cup R^2 \cup R^3 \cup \cdots$$

Poleg tranzitivne ovojnice lahko obravnavamo tudi

- refleksivno ovojnico : $R \cup \Delta_A$
- simetrično ovojnico : $R \cup R^T$
- refleksivno tranzitivno ovojnico $R^* := \bigcup_{n \in \mathbb{N}} R^n = \Delta_R \cup R \cup R^2 \cup \ldots$

Ovojnica = ogrinjača = zaprtje