Preseki in unije družin:

$\{x \mid \varphi(x)\}$ razred

Naj bo $A : I \to \mathrm{Set}$

$$\bigcup_{i \in I} A_i := \{ x \mid \exists i \in I.\ x \in A_i \}$$

$$\bigcap_{i \in I} A_i := \{ x \mid \forall i \in I.\ x \in A_i \}$$

Izračunamo: za prazno družino, $I = \emptyset$:

$$\bigcap_{i \in \emptyset} A_i = \{ x \mid \forall i \in \emptyset.\ x \in A_i \} = \{ x \mid \top \} = \mathrm{Set}$$

$$\bigcup_{i \in \emptyset} A_i = \{ x \mid \exists i \in \emptyset.\ x \in A_i \} = \{ x \mid \bot \} = \emptyset$$

Aksiom o uniji: Unija družine množic je množica.

Presek neprazne družine: obstaja $k \in I$:

$$\bigcap_{i \in I} A_i \subseteq A_k$$

očitno (če je $x \in A_i$ za vse $i \in I$, potem je očitno $x \in A_k$)

razred, ki je vsebovan v množici je množica, namreč

množica

$$\bigcap_{i \in I} A_i = \{ x \in A_k \mid \forall i \in I.\ x \in A_i \}$$

Produkt družine

$A_1 \times A_2 \quad \dots \quad (a_1, a_2) \qquad a_i \in A_i$ za $i = 1, 2$

$A_1 \times A_2 \times \dots \times A_7 \quad \dots \quad (a_1, a_2, \dots, a_7) \qquad a_i \in A_i,$ za $i = 1, \dots, 7$

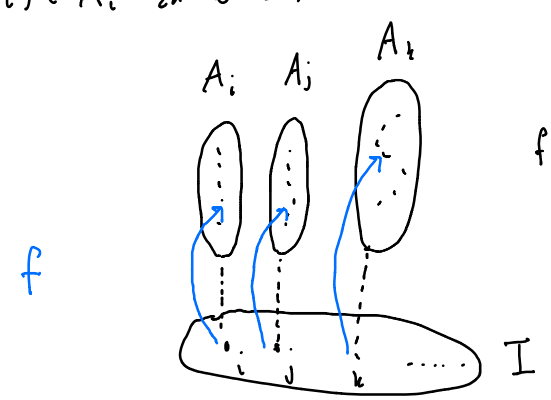
$A_1 \times A_2 \times A_3 \times \dots \qquad (a_1, a_2, a_3, \dots) \qquad a_i \in A_i$ za $i \in \mathbb{N}$

$A : \mathbb{N} \to \mathrm{Set}$ — zaporedje $\mathbb{N} \to \,?$

<u>Def</u>: Naj bo $A : I \to \mathrm{Set}$. **Funkcija izbire** za družino A je taka funkcija

$$f : I \to \bigcup_{i \in I} A_i$$

da velja $f(i) \in A_i$ za $i \in I$.



f za vsak indeks i <u>izbere</u> element A_i

<u>Def</u>: <u>Kartezični produkt</u> družine $A : I \to \mathrm{Set}$ je

$$\prod_{i \in I} A_i := \{ \underbrace{f : I \to \bigcup_{i \in I} A_i}_{\text{eksponentna}} \mid \forall i \in I.\, f(i) \in A_i \}$$

$$f \in \Big(\bigcup_{i \in I} A_i\Big)^I$$

Vsota družine

$A_1 + A_2 + A_3$ ......

$\iota_1(a_1) \quad a_1 \in A_1$

$\iota_2(a_2) \quad a_2 \in A_2$

$\iota_3(a_3) \quad a_3 \in A_3$

....

$\iota_k(a) \quad a \in A_k$

<u>Def</u>: <u>Vsota</u> (<u>koprodukt</u>) družine $A : I \to Set$ je

$$\coprod_{i \in I} A_i := \{ \iota_i(x) \mid i \in I,\ x \in A_i \}$$

ι_i oznaka

Elementi vsote $\coprod_{i \in I} A_i$ so oblike $\iota_i(x)$, kjer je $i \in I, x \in A_i$.

Lastnosti preslikav

Def: Preslikava $f : A \to B$ je

- injektivna, če: $\forall x,y \in A.\ f(x)=f(y) \Rightarrow x=y$

  (ekvivalentno: $\forall x,y \in A.\ x \neq y \Rightarrow f(x) \neq f(y)$)

- surjektivna, če: $\forall y \in B.\ \exists x \in A.\ f(x)=y$
- bijektivna, če: injektivna & surjektivna

  $\forall y \in B\ \exists!\, x \in A.\ f(x)=y$

Pozor: injektivnost $\neq$ enoličnost prirejanja

surjektivnost $\neq$ celovitost $\forall x \in A\ \exists y \in B.\ f(x)=y$

Algebra: $a \cdot c = b \cdot c$ ali lahko krajšamo c? Odvisno.

$$g \circ f = h \circ f \Rightarrow g = h$$

$$C \overset{g}{\underset{h}{\rightrightarrows}} A \xrightarrow{f} B$$

Def: Preslikava $f : A \to B$ je

- monomorfizem (mono), če jo smemo krajšati na levi:

  $\forall C \in Set\ \forall g,h : C \to A.\ f \circ g = f \circ h \Rightarrow g = h.$

- epimorfizem (epi), če jo smemo krajšati na desni:

  $\forall C \in Set\ \forall g,h : B \to C.\ g \circ f = h \circ f \Rightarrow g = h.$

$$A \xrightarrow{f} B \overset{g}{\underset{h}{\rightrightarrows}} C$$

Izrek: Naj bosta $f: A \to B$ in $g: B \to C$ preslikavi.

1. f mono $\wedge$ g mono $\Rightarrow$ $g \circ f$ mono
2. f epi $\wedge$ g epi $\Rightarrow$ $g \circ f$ epi
3. $g \circ f$ mono $\Rightarrow$ f mono
4. $g \circ f$ epi $\Rightarrow$ g epi

Dokaz:

(3) Dokazujemo: $g \circ f$ mono $\Rightarrow$ f mono

Predp: $g \circ f$ mono (2)

Dok: f mono

$\Leftrightarrow$ $\forall C \in Set\ \forall k, h: C \to A.\ f \circ k = f \circ h \Rightarrow k = h.$

Naj bo $C \in Set$.

Naj bo $k: C \to A$, $h: C \to A$.

Predp: $f \circ k = f \circ h$. (1)

Dokazujem: $k = h$.

Imamo $f \circ k = f \circ h$

Sledi $g \circ (f \circ k) = g \circ (f \circ h)$

Sledi $(g \circ f) \circ k = (g \circ f) \circ h$

Sledi iz (2): $k = h$ ∎

Izrek: Za preslikavo f velja:

(1) f mono $\Leftrightarrow$ f injektivna

(2) f epi $\Leftrightarrow$ f surjektivna

(3) f izomorfizem $\Leftrightarrow$ f bijektivna

Dokaz: glej priložene zapiske

Primer: f mono $\Rightarrow$ f injektivna

Predp f mono. (1)

Dok: f injektivna

$\Leftrightarrow$ $\forall x,y \in A.\ f(x) = f(y) \Rightarrow x = y$.

Naj bo $x, y \in A$.

Predp. $f(x) = f(y)$ (2)

Dokazujem: $x = y$.

$A^1 \cong A$

Definiramo: $g, h : 1 \to A$

$g : () \mapsto x$

$h : () \mapsto y$

Trdim: $f \circ g = f \circ h$ (3)

$\Leftrightarrow$ $\forall u \in 1.\ (f \circ g)(u) = (f \circ h)(u)$

$\Leftrightarrow$ $(f \circ g)(()) = (f \circ h)(())$

$\Leftrightarrow$ $f(g(())) = f(h(()))$

$\Leftrightarrow$ $f(x) = f(y)$

$\Leftrightarrow$ $\top$ po (2)

Uporabim (1) na (3): $g = h$ (4)

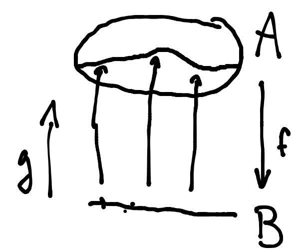
Iz (4) sledi:

$$\begin{array}{ccc} g(1) & = & h(1) \\ \| & & \| \\ x & & y \end{array} \qquad \blacksquare$$

<u>Definicija</u>: Naj bosta $f : A \to B$ in $g : B \to A$ taki, da velja
$$f \circ g = id_B$$

Pravimo:

- f je <u>levi inverz</u> g
- g je <u>desni inverz</u> f
- f je <u>retrakcija</u> iz A na B
- g je <u>prerez</u> f



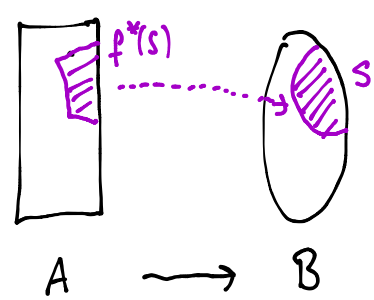
<u>Izrek</u>: Retrakcija je epi, prerez je mono.

Slike in praslike

<u>Def</u>: Naj bo $f : A \to B$ preslikava

- <u>praslika</u> $S \subseteq B$ je $f^*(S) = \{ x \in A \mid f(x) \in S \}$

  (<u>inverzna slika</u>)



slab zapis: $f^{-1}(S)$

- <u>(direktna) slika</u> $T \subseteq A$ je $f_*(T) = \{y \in B \mid \exists x \in T .\, f(x) = y\}$

$\{y \in B \mid \exists x \in T .\, f(x) = y\}$ pišemo tudi

$\{f(x) \in B \mid x \in T\}$ izpeljana množica

Primer: $\{n^2 \mid n \in \mathbb{N},\ 1 \leq n \leq 100\}$