Potenčna množica

$P(A)$ potenčna množica množice A

Elementi: $S \in P(A) \Leftrightarrow S \subseteq A$

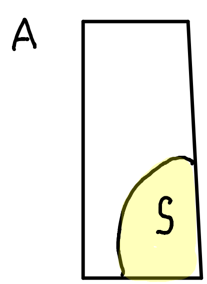
Primer: $P(\emptyset) = \{\emptyset\}$

Primer: $P(\{a,b,c\}) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{b,c\}, \{a,c\}, \{a,b\}, \{a,b,c\}\}$

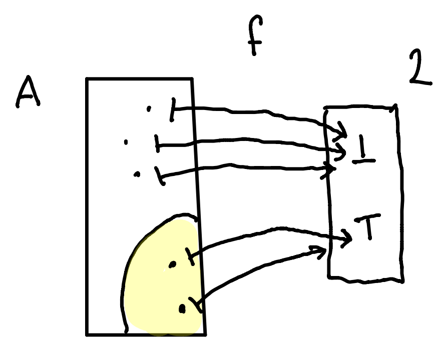
Def: Karakteristična funkcija na množici A je preslikava iz A v množico 2. $(2 = \{\bot, \top\})$

(Pogosto, v analizi, so to preslikave $A \to \{0,1\}$,
v računalništvu $A \to \{\text{false}, \text{true}\}$)

Zveza med podmnožicami A in karakterističnimi funkcijami na A:



$S \subseteq A$



$f : A \to 2$

χ

χ

Izrek: $P(A) \cong 2^A$.

Dokaz: Podamo izomorfizem:

$$\chi : P(A) \longrightarrow 2^A$$

$$g : 2^A \longrightarrow P(A)$$

Namesto $\chi(S)$ pišemo χ_S

$$\chi_S := \left(x \mapsto \begin{cases} \top, & x \in S \\ \bot, & x \notin S \end{cases} \right)$$

$$:= \left(x \mapsto (x \in S) \right)$$ čudno, a prav.

$$g(\underset{\in 2^A}{f}) := \{ x \in A \mid f(x) = \top \}$$

$$:= \{ x \in A \mid f(x) \}$$ čudno, a prav

Preverimo:

1. $\chi \circ g = id_{2^A}$

   $\forall f \in 2^A .\ \chi_{g(f)} = f$

   $\forall f \in 2^A .\ \forall x \in A .\ \chi_{g(f)}(x) = f(x)$

2. $g \circ \chi = id_{P(A)}$

   $\forall S \in P(A) .\ g(\chi_S) = S$

   $\downarrow$ dobimo

   $\forall S \in P(A) .\ \forall x \in A .\ x \in g(\chi_S) \Leftrightarrow x \in S$

Boolova algebra množic

Boolova algebra resničnostnih vrednosti:

$2 = \{\bot, \top\}$

operacije: $\bot, \top, \vee, \wedge, \neg$

+ zakoni Boolove algebre (enačbe)

Boolova algebra podmnožic množice A:

$\mathcal{P}(A)$

operacije: $\emptyset$ ...... $\bot$

A ..... $\top$

unija $\cup$ .... $\vee$

$\cap$ ..... $\wedge$

komplement ^{c} ...... $\neg$

$S \subseteq A$, komplement $A \setminus S = \{x \in A \mid x \notin S\}$

S^c tudi to je zapis za komplement

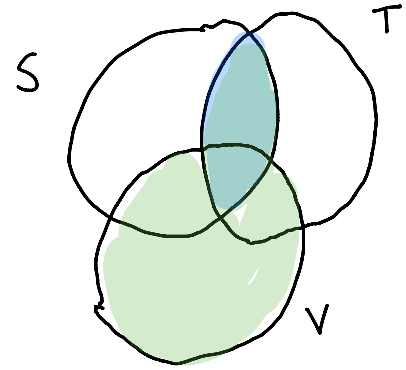
Ali za $\emptyset, A, \cup, \cap, {}^c$ veljajo vsi zakoni Boolove algebre?

<u>Npr:</u>

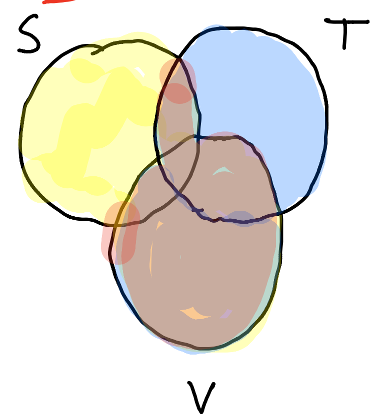
$S \cup T = T \cup S$ ✓

$(S \cap T) \cup V = (S \cup V) \cap (T \cup V)$ preveriti

$(S \cap T) \cup V$ $\qquad\qquad$ $(S \cup V) \cap (T \cup V)$



$=$ ✓



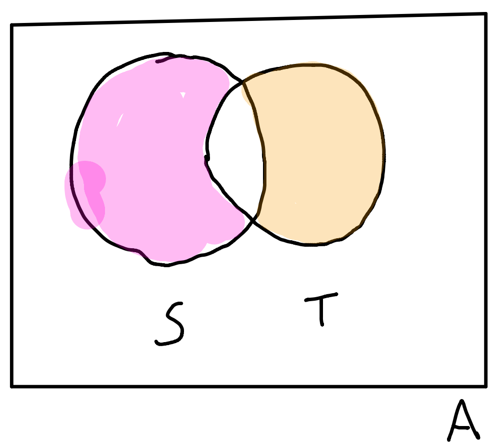
Ekskluzivni ali: $\quad p \veebar q \iff (\neg p \wedge q) \vee (p \wedge \neg q)$

Na množicah je ustrezna operacija

"T brez S" $\qquad$ "S brez T"

$$S \oplus T \iff (S^c \cap T) \cup (S \cap T^c)$$

Simetrična razlika množic S in T



$P(A)$ je grupa za operacijo $\oplus$.

(Kako izračunamo inverz in kaj je enota za $\oplus$?)

Množice in razredi

Russellov paradoks

Ideja:

$\{ x \mid \varphi(x) \}$ množica vseh objektov, ki zadoščajo pogoju φ.

Torej: $a \in \{ x \mid \varphi(x) \} \Leftrightarrow \varphi(a)$

Definirajmo

$$R := \{ S \mid S \notin S \}$$

Izpeljemo protislovje:

1. Dokažimo $R \notin R$.

   Predpostavimo $R \in R$.
   Po definiciji R, sledi $R \notin R$. Protislovje

2. Dokažimo $R \in R$.

   Treba je dokazati, da velja $R \notin R$. Glej točko 1.

Ločimo med dvema vrstama zbirk / skupkov:

- razredi — poljubne zbirke, lahko jih tvorimo

$$\{ x \mid \varphi(x) \}$$

- množice — konstruiramo samo z vnaprej določenimi operacijami (produkt, eksponent, podmnožica, ...)

Množica je lahko element množice ali razreda.
Razredi niso elementi. Torej:

$\{ x \in A \mid \varphi(x) \}$ podmnožica

$$\{ x \mid \varphi(x) \} \quad \text{razred}$$

x $\downarrow$ sme biti množica ali osnovni matematični objekt (število, točka v ravnini)

ne sme biti razred.

Z razredi lahko delamo kot z množicami, vendar je nesmiselno vprašati ali zapisati

$$C \in D$$

$\uparrow$ razred

Russellov paradoks smo razrešili:

$$R := \{ S \mid S \notin S \} \quad \text{razred}$$

"$R \in R$" ni veljavna formula

Razred C je množica, če ga lahko skonstruiramo s pravili za konstrukcije množic.

Primer
$$\{x \mid x=7 \lor x=9\} \quad \text{razred}$$
$$= \{7,9\}$$ množica, ki jo lahko tvorimo kot končno množico

Pravi razred je razred, ki ni množica. Primeri:

1. Russellov razred R
2. Razred vseh množic

$$V := \{S \mid S \text{ je množica}\}$$

Set – tudi oznaka za V

(Če bi bil V množica, potem bi lahko tvorili njeno podmnožico $\{S \in V \mid S \notin S\}$, to pa je R.)

3. Razred vseh enojcev $\{S \mid \exists! x \in S . \top\}$
4. Razred vseh grup, vektorskih prostorov, vseh kolobarjev, ...

Družine množic

Def: <u>Družina množic</u> je preslikava

$$A : I \longrightarrow \mathrm{Set}$$

kjer se I imenuje <u>indeksna množica</u> družine A.

Namesto $A(i)$ običajno pišemo A_i.

Tako družino zapišemo tudi: $\{A_i\}_{i \in I}$.

<u>Primer</u>:

- $I = \{0,1,2\}$

  $A_0 := \{\Delta, \square\}$

  $A_1 := \emptyset$

  $A_2 = \{42, 1\}$

  $A : \{0,1,2\} \longrightarrow \mathrm{Set}$

- <u>Prazna družina</u>: $I = \emptyset$

  $$A : \emptyset \longrightarrow \mathrm{Set}$$

- <u>Družina praznih množic</u>:

  $$A : I \longrightarrow \mathrm{Set}$$
  $$A_i := \emptyset$$

- Družina nepraznih množic:

Takšna družina $A : I \to \mathrm{Set}$, da velja

$$\forall i \in I.\ A_i \neq \emptyset.$$

Def: Unija družine $A : I \to \mathrm{Set}$ je množica

$$\bigcup A \quad \text{ali} \quad \bigcup_{i \in I} A_i$$

za katero velja

$$x \in \bigcup_{i \in I} A_i \iff \exists i \in I.\ x \in A_i$$

Def: Presek družine $A : I \to \mathrm{Set}$ je množica

$$\bigcap A \quad \text{ali} \quad \bigcap_{i \in I} A_i$$

za katero velja

$$x \in \bigcap_{i \in I} A_i \iff \forall i \in I.\ x \in A_i$$

DN: Kaj je presek prazne družine?