Boolova algebra

Resničnostne tabele

Izjava ima resničnostno vrednost $(\perp, \top)$

<u>Primer</u>: $2+3=7 \Rightarrow \sqrt{2}=5$ ...... resnično

Če se v izjavi pojavijo spremenljivke: (naj bo $x \in \mathbb{R}$)

$3+x<5$ ...... resničnostna vrednost je odvisna od x

x	$3+x<5$
0	$\top$
π	$\perp$
$\sqrt{7}$	$\perp$
$\vdots$	

Ta tabela je neskončna ....

<u>Izjavna spremenljivka</u> (izjavni simbol) je spremenljivka, ki zavzema resničnostne vrednosti, t.j. elemente $2=\{\perp, \top\}$

Zanimajo nas formule, ki vsebujejo samo izjavne spremenljivke in vsebujejo le izjavne veznike $(\perp, \top, \wedge, \vee, \neg, \Rightarrow, \Leftrightarrow)$

(<u>ne</u> vsebujejo $\forall, \exists, =, \ldots$)

To so <u>izjavne formule</u>

Primer: $p \vee \neg q$ $\qquad p, q \in 2$

$(p \wedge \neg r) \vee (q \wedge r)$ $\qquad p, q, r \in 2$

Resničnostna tabela za izjavno formulo:

p	q	$\neg p \vee q$
$\perp$	$\perp$	$\top$
$\perp$	$\top$	$\top$
$\top$	$\perp$	$\perp$
$\top$	$\top$	$\top$

Taka izjavna formula $\varphi(p_1, \dots, p_n)$ določa preslikavo

$$(p_1, \dots, p_n) \longmapsto \varphi(p_1, \dots, p_n)$$

$$\underbrace{2 \times 2 \times \dots \times 2}_{n} \longrightarrow 2 \qquad \text{Boolove preslikave}$$

Primer: formula $\neg p \vee q$

preslikava: $(p, q) \mapsto \neg p \vee q$

$\{\perp, \top\} \times \{\perp, \top\} \longrightarrow \{\perp, \top\}$

$x \in \mathbb{R}$

izraz $x^2 + 7$

preslikava

$x \longmapsto x^2 + 7$

$\mathbb{R} \to \mathbb{R}$

Def: Tavtologija je izjavna formula, ki ima vedno vrednost $\top$, ne glede na vrednosti parametrov.

Ne-Primer: $\neg(\neg p \Rightarrow p)$

p	$\neg(\neg p \Rightarrow p)$
$\perp$	$\top$
$\top$	$\perp$

ni tavtologija

Primer: $\top$ $\top$

Izrek: Izjavna formula ima dokaz, če in samo če, je tavtologija.

p	q	?
$\bot$	$\bot$	$\bot$
$\bot$	$\top$	$\top$ ←
$\top$	$\bot$	$\top$ ←
$\top$	$\top$	$\bot$

1. Disjunktivna oblika:

$$(\neg p \wedge q) \vee (p \wedge \neg q)$$

↑ resnična v 2. vrstici

↑ resnična v 3. vrstici

p	q	$\neg p \wedge q$
$\bot$	$\bot$	$\bot$
$\bot$	$\top$	$\top$
$\top$	$\bot$	$\bot$
$\top$	$\top$	$\bot$

2. Konjunktivna oblika:

1. vrstica 4. vrstica

$$(p \vee q) \wedge (\neg p \vee \neg q)$$

↑ neresnična v 1.

↑ neresnična v 4.

Uporabili smo samo $\vee, \wedge, \neg$. Pravimo, da $\vee, \wedge, \neg$ tvorijo poln nabor veznikov

Tudi $\wedge, \neg$ je poln nabor, ker $p \vee q \Leftrightarrow \neg(\neg p \wedge \neg q)$

Tudi NAND

p	q	p NAND q
$\bot$	$\bot$	$\top$
$\bot$	$\top$	$\top$
$\top$	$\bot$	$\top$
$\top$	$\top$	$\bot$

$(p \uparrow q)$

p	p NAND p
$\bot$	$\top$
$\top$	$\bot$

Boolova algebra

$3+4 = 7$ izraza imata enaki vrednosti

$\varphi \Leftrightarrow \psi$ enaki resničnostni vrednosti

Lahko pišemo tudi $\varphi = \psi$

Pravila za ⊤ in ⊥

- $\top \vee p = \top$ (⊤ absorbira ∨)
- $\top \wedge p = p$ (⊤ je nevtralni element za ∧)
- $\neg \top = \bot$
- $\bot \wedge p = \bot$ (⊥ absorbira ∧)
- $\bot \vee p = p$ (⊥ je nevtralni element za ∧)
- $\neg\bot = \top$

Pravila za negacijo ¬

- $\neg\neg p = p$ (negacija je involucija)
- de Morganovi pravili:
  - $\neg(p \wedge q) = \neg p \vee \neg q$
  - $\neg(p \vee q) = \neg p \wedge \neg q$

$$\neg(p \Rightarrow q) = \neg(\neg p \vee q) = \neg\neg p \wedge \neg q = p \wedge \neg q$$

Pravila za konjukcijo in disjunkcijo

- $p \wedge q = q \wedge p$ (konjunkcija je komutativna)
- $p \wedge p = p$ (konjunkcija je idempotentna)
- $(p \wedge q) \wedge r = p \wedge (q \wedge r)$ (konjunkcija je asociativna)
- $p \vee q = q \vee p$ (disjunkcija je komutativna)
- $p \vee p = p$ (disjunkcija je idempotentna)
- $(p \vee q) \vee r = p \vee (q \vee r)$ (disjunkcija je asociativna)

Absorbcijski pravili:

- $p \wedge (p \vee q) = p$
- $p \vee (p \wedge q) = q$

Distributivnostni pravili:

- $p \wedge (q \vee r) = (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$
- $p \vee (q \wedge r) = (p \vee q) \wedge (p \vee r)$

Ostala pravila

- $p \vee \neg p = \top$ (izključena tretja možnost)
- $p \wedge \neg p = \bot$
- $(p \Rightarrow q) = (\neg q \Rightarrow \neg p)$
- $(p \Rightarrow q) = \neg q \vee p$

p	q	$p \wedge (p \vee q)$
$\bot$	$\bot$	$\bot$
$\bot$	$\top$	$\bot$
$\top$	$\bot$	$\top$
$\top$	$\top$	$\top$

Se ujema

$(x+y)\cdot c = x\cdot c + y\cdot c$

kontrapozitivna oblika implikacije

"Ekskluzivni ali"

$p \veebar q = \neg(p \Leftrightarrow q)$

p	q	$p \veebar q$
$\bot$	$\bot$	$\bot$
$\bot$	$\top$	$\top$
$\top$	$\bot$	$\top$
$\top$	$\top$	$\bot$

$(\{\bot, \top\}, \veebar)$ komutativna grupa

$(0, 1, (x,y) \mapsto (x+y) \bmod 2)$

Uporabna pravila za kvantifikatorje

- $(\forall x \in \emptyset . \varphi(x)) \Leftrightarrow \top$
- $(\exists x \in \emptyset . \varphi(x)) \Leftrightarrow \bot$
- $(\forall x \in \{a\} . \varphi(x)) \Leftrightarrow \varphi(a)$
- $(\exists x \in \{a\} . \varphi(x)) \Leftrightarrow \varphi(a)$
- $(\neg \forall x \in A . \varphi(x)) \Leftrightarrow \exists x \in A . \neg \varphi(x)$ } de Morgan
- $(\neg \exists x \in A . \varphi(x)) \Leftrightarrow \forall x \in A . \neg \varphi(x)$
- $(\psi \Rightarrow \forall x \in A . \varphi(x)) \Leftrightarrow \forall x \in A . \psi \Rightarrow \varphi(x)$ } Frobenius (eksotično)
- $(\psi \vee \forall x \in A . \varphi(x)) \Leftrightarrow \forall x \in A . \psi \vee \varphi(x)$
- $(\psi \wedge \exists x \in A . \varphi(x)) \Leftrightarrow \exists x \in A . \psi \wedge \varphi(x)$
- $(\forall u \in A \times B . \varphi(u)) \Leftrightarrow \forall x \in A . \forall y \in B . \varphi(x, y)$
- $(\exists u \in A \times B . \varphi(u)) \Leftrightarrow \exists x \in A . \exists y \in B . \varphi(x, y)$
- $(\forall u \in A + B . \varphi(u)) \Leftrightarrow (\forall x \in A . \varphi(\iota_1(x))) \wedge (\forall y \in B . \varphi(\iota_2(y)))$
- $(\forall u \in A \cup B . \varphi(u)) \Leftrightarrow (\forall x \in A . \varphi(x)) \wedge (\forall y \in B . \varphi(y))$
- $(\exists u \in A + B . \varphi(u)) \Leftrightarrow (\exists x \in A . \varphi(\iota_1(x))) \vee (\exists y \in B . \varphi(\iota_2(y)))$
- $(\exists u \in A \cup B . \varphi(u)) \Leftrightarrow (\exists x \in A . \varphi(x)) \vee (\exists y \in B . \varphi(y))$
- $(\forall u \in \{x \in A \mid \psi(x)\} . \varphi(u)) \Leftrightarrow \forall x \in A . \psi(x) \Rightarrow \varphi(x)$] Pozor!
- $(\exists u \in \{x \in A \mid \psi(x)\} . \varphi(u)) \Leftrightarrow \exists x \in A . \psi(x) \wedge \varphi(x)$

za vsak element iz A, ki zadošča ψ, velja φ.

Podmnožice in potenčne množice

$S \subseteq T$ — S je podmnožica T

$$S \subseteq T \Leftrightarrow \forall x \in S . x \in T$$

Primer: $T \subseteq T$

$\emptyset \subseteq T$

$S \subseteq T$ in $T \subseteq U \Rightarrow S \subseteq U$ — tranzitivnost $\subseteq$

$S \subseteq T$ in $T \subseteq S \Rightarrow S = T$ — princip ekstenzionalnosti za množice (antisimetričnost $\subseteq$)

Tvorimo podmnožice:

$$\{ x \in A \mid \varphi(x) \}$$

elementi so tisti elementi množice A, ki zadoščajo pogoju φ

x je vezana spremenljivka

$$\{ x \in A \mid \varphi(x) \} = \{ y \in A \mid \varphi(y) \} = \{ \mathcal{D} \in A \mid \varphi(\mathcal{D}) \}$$

Primer: elementi množice $\{ x \in \mathbb{N} \mid x < 10 \land \underbrace{\exists y \in \mathbb{N}.\, x = 3y}_{x \text{ je deljiv s } 3} \}$ so $9, 6, 3$ in 0.

Drugi zapisi $\{ x \in A \,;\, \varphi(x) \}$

$\{ x \in A : \varphi(x) \}$

LaTeX

$\{ x \in A \mid \varphi(x) \}$

\mid

<u>Velja:</u>

$$a \in \{ x \in A \mid \varphi(x) \} \iff a \in A \land \varphi(a)$$