Pravila dokazovanja

Dokaz je skupek računskih korakov in sklepov, s katerimi utemeljimo izjavo. V vsakem trenutku mora biti jasno, kaj dokazujemo, katere spremenljivke so veljavne in katere predpostavke so na voljo. V splošnem imamo v dokazu štiri vrste korakov:

1. Izjavo zamenjamo z njej ekvivalentno.
2. Izraz zamenjamo z njemu enakim.
3. S pravili uporabe iz danih predpostavk in že znanih dejstev izpeljemo nova dejstva.
4. S pravili vpeljave neposredno dokažemo izjavo.

Običajno izjavo zamenjamo z njej ekvivalentno, ko jo poenostavimo ali ko želimo spremeniti način dokazovanja.

Nekateri deli dokaza so samostojni poddokazi pomožnih izjav. Vse spremenljivke in predpostavke, ki jih uvedemo v poddokazu, so na voljo izključno v poddokazu samem.

Pravila vpeljave

Pravila vpeljave so osnovni načini za dokazovanje izjav.

Konjunkcijo $\phi \wedge \psi$ dokažemo tako, da dokažemo obe izjavi, vsako v svojem poddokazu:

Dokažimo $\phi \wedge \psi$.

1. *Dokažimo* ϕ*:* $\dots$
2. *Dokažimo* ψ*:* $\dots$

Disjunkcijo $\phi \vee \psi$ dokažemo na enega od dveh načinov. Prvi način:

Dokažimo $\phi \vee \psi$.

Dokažimo ϕ*:* $\dots$

Drugi način:

Dokažimo $\phi \vee \psi$.

Dokažimo ψ*:* $\dots$

Implikacijo $\phi \Rightarrow \psi$ dokažemo tako, da predpostavimo ϕ in dokažemo ψ:

Dokažimo $\phi \Rightarrow \psi$*:*

Predpostavimo ϕ*.*
Dokažemo ψ*:* $\dots$

Ekvivalenco $\phi \Leftrightarrow \psi$ dokažemo tako, da dokažemo obe implikaciji $\phi \Rightarrow \psi$ in $\psi \Rightarrow \phi$:

Dokažimo $\phi \Leftrightarrow \psi$.

1. *Dokažimo $\phi \Rightarrow \psi$:* $\dots$
2. *Dokažimo $\psi \Rightarrow \phi$:* $\dots$

Resnice $\top$ ni treba dokazovati, oziroma je "očitno" res. V praksi $\top$ nastopi kot izjava, ki jo želimo dokazati, ko neko drugo izjavo poenostavimo. Primer: ko dokazujemo $(x+1)^2 < 0 \land (y+1)^2 > 0 \Rightarrow (x+y)^2 > 1$, najprej poenostavimo

$$\begin{aligned} & (x+1)^2 < 0 \land (y+1)^2 > 0 \Rightarrow (x+y)^2 > 1 \\ \Longleftrightarrow \quad & \bot \land (y+1)^2 > 0 \Rightarrow (x+y)^2 > 1 \\ \Longleftrightarrow \quad & \bot \Rightarrow (x+y)^2 > 1 \\ \Longleftrightarrow \quad & \top. \end{aligned}$$

S tem je dokaz zaključen, saj smo dobili $\top$.

Neresnico $\bot$ dokažemo tako, da dokažemo neko izjavo ϕ in njeno negacijo $\neg\phi$. V tem primeru pravimo, da "iščemo protislovje" in ne da "dokazujemo neresnico":

Iščemo protislovje.

1. *Dokažimo ϕ:* $\dots$
2. *Dokažimo $\neg\phi$:* $\dots$

To je protislovje.

Negacijo $\neg\psi$ dokažemo tako, da predpostavimo ψ in dokažemo $\bot$:

Dokažimo $\neg\psi$:

Predpostavimo ψ.
Iščemo protislovje: $\dots$

Opomba: ni nujno, da poiščemo protislovje med ψ in $\neg\psi$. Lahko je protislovje med poljubno izjavo ϕ in njeno negacijo $\neg\phi$.

Univerzalno izjavo $\forall x \in A \,.\, \phi(x)$ dokažemo takole:

Dokažimo $\forall x \in A \,.\, \phi(x)$.

Izberemo novo spremenljivko y, ki je še nismo uporabili (lahko tudi x).
Naj bo $y \in A$.
Dokažemo $\phi(y)$: $\dots$

Eksistenčno izjavo $\exists x \in A \,.\, \phi(x)$ dokažemo tako, da podamo konkreten izraz a, ki določa element A in dokažemo, da velja $\phi(a)$:

Dokažimo $\exists x \in A \,.\, \phi(x)$:

Vzemimo $x := a$.
Dokažemo $a \in A$: $\ldots$
Dokažemo $\phi(a)$: $\ldots$

Opomba: pomembno je, da za a navedemo *konkreten izraz*, ki pa je seveda lahko odvisen od ostalih spremenljivk, ki so trenutno na voljo.

Pravila uporabe

Pravila uporabe nam povedo, kako iz predpostavk in že znanih dejstev izpeljemo nova dejstva.

Konjunkcijo $\phi \land \psi$ uporabimo tako, da izpeljemo ϕ in izpeljemo ψ:

Vemo, da velja $\phi \land \psi$.
Torej velja ϕ.
Torej velja ψ.

Disjunkcijo $\phi \lor \psi$ uporabimo tako, da obravnavamo dva primera.

Dokažimo ρ.
Vemo, da velja $\phi \lor \psi$.
Obravnavamo dva primera:

1. *Predpostavimo ϕ.*
   Dokažemo ρ: $\ldots$
2. *Predpostavimo ψ.*
   Dokažemo ρ: $\ldots$

Implikacijo $\phi \Rightarrow \psi$ uporabimo tako, da dokažemo ϕ in izpeljemo ψ:

Vemo, da velja $\phi \Rightarrow \psi$.

Dokažimo ϕ: $\ldots$

Torej velja ψ.

Resnice $\top$ ni uporabna kot predpostavka.

Neresnico $\bot$ uporabimo tako, da takoj zaključimo dokaz, saj iz neresnice sledi karkoli:

> *Vemo, da velja* $\bot$.
> *Dokažimo* ρ:
>
> > *Ker velja* $\bot$, *sledi* ρ.

Negacijo $\neg\phi$ uporabimo tako, da dokažemo ϕ in zaključimo dokaz.

> *Dokažimo* ρ.
> *Vemo, da velja* $\neg\phi$.
>
> - *Dokažimo* ϕ: $\ldots$
>
> *Torej velja* ρ.

Univerzalno izjavo $\forall x \in A \,.\, \phi(x)$ uporabimo tako, da za izbrani element $a \in A$ uvedemo predpostavko $\phi(a)$:

> *Vemo, da velja* $\forall x \in A \,.\, \phi(x)$.
> *Vemo, da je* $a \in A$.
> *Torej velja* $\phi(a)$.

Eksistenčno izjavo $\exists x \in A \,.\, \phi(x)$ uporabimo takole:

> *Dokažimo* ρ.
> *Vemo, da velja* $\exists x \in A \,.\, \phi(x)$.
>
> > *Izberemo* novo *spremenljivko* y, *ki je še nismo uporabili in ki se ne pojavi v* ρ *(lahko je* x, *če ne nastopa nikjer drugje).*
> > *Vemo, da imamo* $y \in A$, *za katerega velja* $\phi(y)$.
> > *Dokažemo* ρ: $\ldots$

Izključena tretja možnost in dokaz s protislovjem

Pravilo izključene tretje možnosti pravi, da vedno velja $\phi \lor \neg\phi$ in ga običajno uporabimo takole:

> *Dokažimo* ρ.
> *Velja* $\phi \lor \neg\phi$:
>
> 1. *Predpostavimo* ϕ.
>   *Dokažemo* ρ: $\ldots$
> 2. *Predpostavimo* $\neg\phi$.
>   *Dokažemo* ρ: $\ldots$

Dokaz s protislovjem poteka takole:

> *Dokažimo ρ. Dokaz s protislovjem:*
>
> > *Predpostavimo $\neg\rho$.*
> > *Poiščemo protislovje:* $\ldots$

Opomba: dokaz s protislovjem in pravilo vpeljave za negacijo sta dve *različni* pravili sklepanja.