Simbolni zapis & formalna logika

① Simboli:

→ znaki, ki jih uporabljamo

$x, y, a, b,$ črke

$\alpha, \eta, \mu,$ grške črke

$\varepsilon, \zeta, \xi, \equiv$

$\otimes, \int,$

Pred uporabo, moramo simbol uvesti:

1. Simbol že poznamo od prej: $\sin$ π
2. Definiramo ga kot oznako za točno določen matematični objekt.
3. Simbol nastopa kot prost parameter ali prosta spremenljivka. To naredimo takole:

$$\text{"Naj bo } \underset{\text{uvedemo } x}{x} \in \underset{\text{vse kar vemo o } x \text{ je, da je element } A.}{A}\text{."}$$

Kontekst je nabor vseh simbolov, ki smo jih vpeljali

Primer: "Naj bo $f: A \to B$. Za vsak $x \in A$ velja $f(x) = f(x)$."

A množica
B množica
f preslikava $A \to B$

f, A, B

uvedemo

f, A, B, x

Simbolni zapis izjav

Izjavni račun:

- konstanti
  - $\perp$ neresnica (tudi: false, 0)
  - $\top$ resnica (tudi: true, 1)
- vezniki
  - → negacija $\neg$: $\neg\lambda$ "ne lambda"
  - → konjunkcija $\wedge$:

    $\varphi \wedge \psi$ "fi in psi"

  - → disjunkcija $\vee$:

    $\varphi \vee \psi$ "fi ali psi"

  - → implikacija $\Rightarrow$: (tudi: $\supset$ → $\therefore$)

    $\rho \Rightarrow \tau$

"če ρ potem τ"

"iz ρ sledi τ"

"ρ je zadosten pogoj za τ"

"τ je potreben pogoj za ρ."

"τ če ρ"

→ ekvivalenca $\Leftrightarrow$

$$\sigma \Leftrightarrow \omega$$

"σ je ekvivalentno ω"

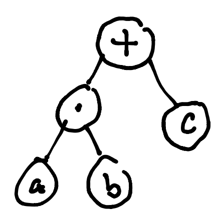
"σ če in samo če ω"

"σ je potreben in zadosten pogoj za ω."

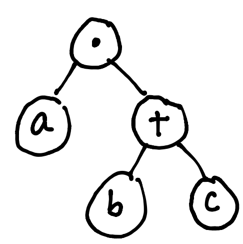
~~Okrajšan~~ Okrajšava za $(\sigma \Rightarrow \omega) \wedge (\omega \Rightarrow \sigma)$

Prioriteta in asociativnost

$$a \cdot b + c \overset{?}{=} (a \cdot b) + c$$

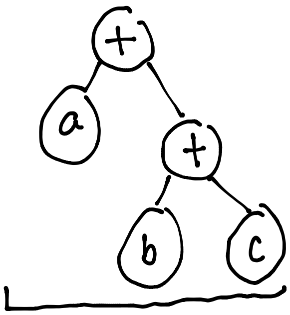


$$\overset{?}{=} a \cdot (b + c)$$

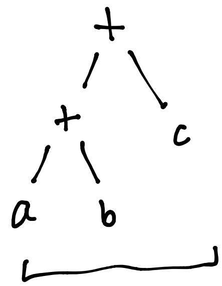


- $\cdot$ ima prioriteto pred $+$
  prednost

$$a + b + c = (a + b) + c$$



$a + (b + c)$



$(a+b)+c$

$$a - b - c = (a - b) - c$$

$-$ je levo-asociativen (združuje na levi)

$$a^{b^c} \qquad (a^b)^c \qquad a^{(b^c)}$$

desno asociativen

Prioriteta in asociativnost logičnih veznikov:

$\neg$ ima prednost pred

$\wedge$ —||—

$\vee$ —||—

$\Rightarrow, \Leftrightarrow$

$\wedge, \vee$ levo asociativna

$(a \wedge b) \wedge c = a \wedge b \wedge c$

to vejo samo logiki $\left\{ \begin{array}{l} \Rightarrow \text{ desno asociativna} \\ a \Rightarrow b \Rightarrow c \text{ je } a \Rightarrow (b \Rightarrow c) \end{array} \right.$

$\cancel{(p+7) \Rightarrow 12}$ $\quad$ $p+7=3 \Rightarrow q=12$

$p \wedge q \Rightarrow q \vee r$ je $(p \wedge q) \Rightarrow (q \vee r)$

$x>7 \vee x<-7 \wedge y=5$ je $(x>7) \vee ((x<-7) \wedge (y=5))$

V praksi:

$A \Leftrightarrow$

$B \Leftrightarrow$

C

$\cancel{A \Leftrightarrow B} \Leftrightarrow C$ je mišljeno:

1. $A \Leftrightarrow B$
2. $B \Leftrightarrow C$

V praksi:

$A \Rightarrow$

$B \Rightarrow$

C

mišljeno:

1. $A \Rightarrow B$
2. $B \Rightarrow C$

$A \cancel{\Rightarrow (B \Rightarrow C)}$

Podobno: $a=b=c=d$ $\quad$ $a=b \wedge b=c \wedge c=d$

$3+4\cdot 12 = 3+48 = 51$ mišljeno:

$\cancel{3+4\cdot 12 = (3+48} = 51)$

Predikatni račun

Izjavni račun + kvantifikatorja

Univerzalni kvantifikator $\forall$

$$\forall x \in A \, . \, \varphi(x)$$

"Za vse x iz A velja $\varphi(x)$."

Eksistenčni kvantifikator $\exists$

$$\exists x \in A \, . \, \varphi(x)$$

"Obstaja x iz A, da velja $\varphi(x)$"
tako da
za katerega

Prioriteta:

$\neg$

$\wedge$

$\vee$

$\Rightarrow \quad \Leftrightarrow$

$\forall \quad \exists$

$\int \boxed{f(x)} \, dx$ celota

$\int$ in d sodelujeta

Pišemo tudi:

$(\exists x \in A)\, \varphi(x)$

$\exists x \in A, \varphi(x)$

$\exists x \in A : \varphi(x)$

$$\sum_{i=1}^{10} i^2+7$$

Slab zapis:

$$\varphi(x) \quad \forall x \in A$$

Primeri:

- Obstaja realno število večje od 5

$$\exists x \in \mathbb{R}.\ x > 5$$

$$\exists y \in \mathbb{R}.\ y > 5$$

Pozor:

$$\forall x \in A.\ \varphi \qquad\qquad x \text{ je vezan v } \varphi$$

$$\exists x \in A.\ \varphi$$

1. φ lahko vsebuje x
2. x se "ne vidi" zunaj formule.

Denimo $\exists \underset{y}{x} \in \mathbb{R}.\ \underset{y}{x} < 8$.

Tedaj sledi $x < 9$.

↑ tega simbola nismo uvedli

$$\forall x \in \mathbb{R}.\left(x > 7 \Rightarrow \left(\exists y \in \mathbb{R}.\left(y^2 + 1 < x \lor x < 8\right)\right)\right)$$

$$\forall x \in A.\left(\varphi \Rightarrow \forall x \in A.\ \psi\right)$$

$$\left(\forall x \in A.\ \varphi\right) \Rightarrow \forall x \in A.\ \psi$$

$$\forall x \in \mathbb{R} . \left(\exists y \in \mathbb{R} . \left(x < y \ \vee \ y \leq x \right) \right)$$

Primer:

1. $\forall x \in \mathbb{R} . \exists y \in \mathbb{R} . \ x < y$ — Vsako število je manjše od nekega števila.

2. $\exists y \in \mathbb{R} . \ \forall x \in \mathbb{R} . \ x < y$ — Neko število je večje od vseh števil.

3. $\left(\exists x \in \mathbb{R} . \ \forall y \in \mathbb{R} . \ x < y \right)$ — Neko število je manjše od vseh števil.

4. Naj bo $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

   - $\exists x \in \mathbb{R} . \exists y \in \mathbb{R} . \ f(x) = 0 \wedge f(y) = 0$

     "f ima ničlo"

   - $\exists x \in \mathbb{R} . \exists y \in \mathbb{R} . \ f(x) = 0 \wedge f(y) = 0 \wedge x \neq y$

     "f ima vsaj dve različni ničli."

Enolični obstoj

$$\exists! \, x \in A . \ \varphi(x)$$

"Obstaja natanko en $x \in A$, da $\varphi(x)$."
enoličen

Enolični obstoj lahko izrazimo z $\forall$ in $\exists$

Gregorjev poskus:

$\forall x \in A . \forall y \in A . \neg(\varphi(x) \land \varphi(y)) \land x \neq y$

DN: Razmisli zakaj to ne deluje

$\exists! x \in A . \varphi(x)$ okrajšava za

$$\underbrace{(\exists x \in A . \varphi(x))}_{\text{vsaj en}} \land \underbrace{\forall y \in A . \forall z \in A . \varphi(y) \land \varphi(z) \Rightarrow y = z}_{\text{največ eden}}$$