Osnovno o množicah in preslikavah

(1) Skupek / zbirka nekih matematičnih objektov

A množica ; a objekt

$$a \in A \qquad \text{"a je element A"}$$

(2) Princip ekstenzionalnosti:

Če imata množici iste elemente, sta enaki.

$$\{1,1,2\} = \{2,1\}$$

(3) Končna množica : $\{a, b, c, \dots, z, ž\}$

$\{a, b, c, \dots, ž\}$

$\{x, y\}$ dvojec

$z \in \{x,y\}$ natanko tedaj, ko velja $z = x$ ali $z = y$

$\{1,2\} \cup \{2,3\} = \{1,2,3\}$

$\{x\}$ enojec $= \{x,x\}$ $\boxed{z \in \{x\} \Leftrightarrow z = x}$

$\{\,\}$ prazna množica , pišemo $\emptyset$

$x \in \{\}$ ne velja

Standardni enojec: $1 = \{()\}$

↑ urejena ničterica

$\mathbb{N} = \{\overset{0?!}{\downarrow} 1, 2, 3, \dots\}$

$\mathbb{R}$ realna števila

$\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{C} \dots$

4 Preslikave ali funkcije

- domena, ki je množica
- kodomena, ki je množica
- prirejanje elementov: način, ki elementom domene priredi elemente kodomene

$f : A \longrightarrow B$ preslikava f iz A v B

ime funkcije (f), domena (A), kodomena (B)

$A \longrightarrow B$ preslikava iz A v B

$A \xrightarrow{f} B$ preslikava f iz A v B

Primer: $\sin : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

Prirejanje: domena A
kodomena B

ni surjektivnost
- celovitost: vsakemu elemntu domene priredimo vsaj en element kodomene

ni injektivnost
- enoličnost: vsakemu elementu domene priredimo največ en element kodomene

Prirejanje običajno podamo s funkcijskim predpisom

$x \mapsto e$ "x se slika v e"

Primer: $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$
$x \mapsto 2x^2 - 7$

Primer: $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$f : x \mapsto 2x^2 - 7$

Primer: $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$f(x) = 2x^2 - 7$ $\cancel{y = 2x^2} - 7$

Aplikacija / evalvacija / uporaba funkcije:

$f : A \to B$ $a \in A$ $\underbrace{f(a)}_{f \text{ smo uporabili na } a}$ → argument f smo evalvirali na a

$f(a)$ je tisti element B, ki ga f priredi a-ju.

Primer: $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$

$f : n \mapsto \frac{1}{2 \cdot n + 3}$ → n zamenjamo z argumentom namesto n vstavimo 7

$f(7) := \frac{1}{2 \cdot 7 + 3}$

$\mathbb{N} \to \mathbb{R}$

$$\left(n \mapsto \frac{1}{2 \cdot n + 3}\right)(7) = \frac{1}{2 \cdot 7 + 3}$$

$$\left(n \mapsto \frac{1}{2 \cdot n + 3}\right)(x + y - 7) = \frac{1}{2 \cdot (x + y - 7) + 3}$$

Substitucija: v izrazu zamenjamo spremenljivko z nekim izrazom

Vezane in proste spremenljivke:

$\mathbb{R} \to \mathbb{R}$

Vezan v predpisu → $x \mapsto 2x + 1$

$7 \mapsto 15$

$\mathbb{R} \to \mathbb{R}$

vezan

$a \mapsto 2a + 1$

$7 \mapsto 15$

Naj bo $b \in \mathbb{R}$ neko število:

$\mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$x \mapsto x + b$ ← prost

$7 \mapsto 7 + b$

Naj bo $c \in \mathbb{R}$ neko število

$\mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$x \mapsto x + c$ ← prost

$7 \mapsto 7 + c$

$$\int_a^b x^2+c\,dx$$

$$\int_a^b y^2+c\,dy$$

x – vezan

$$\int_a^b c^2+c\,dc$$

Problem: "ujeli smo parameter c"

$$\int_a^b \underbrace{a^2+c\,da}_{a \text{ je vezan tukaj}}$$

ok, nevljudno

$$\cancel{\tfrac{1}{3}x^3+8}$$

$$\int x^2\,dx = \frac{1}{3}x^3 + c \quad \text{?!}$$

$$\cancel{\tfrac{1}{3}x^3+7}$$

$7 = 8$

$$7 + \int x^2\,dx$$

$$\underbrace{\int x^2\,dx} + \underbrace{\int x^3\,dx} = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{4}x^4 + C_1 + C_2$$

$$+C$$

$$\emptyset \longrightarrow A$$

prirejanje: elementu x priredimo 42

Ali za vsak $x \in \emptyset$ velja, da smo mu priredili element iz A?

prirejanje ;

$f, g : \emptyset \longrightarrow A$ ali sta enaki?

$h, k: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$h: x \mapsto x+1$

$k: x \mapsto x+2-1$

Ekstenzionalnost funkcij:

funkciji sta enaki če:

1. imata enaki domeni
2. imata enaki kodomeni
3. za vsak argument vrneta enaki vrednosti

$h = k$ ker velja

$h(x) = k(x)$ za vse $x \in \mathbb{R}$

$$\underset{x+1}{\overset{\shortparallel}{}} \;=\; \underset{x+2-1}{\overset{\shortparallel}{}}$$

poračunamo

$f: \emptyset \to A$

$g: \emptyset \to A$

$f = g$?

Ali je za vse $x \in \emptyset$, $f(x) = g(x)$? DA.

$\emptyset \longrightarrow A$ prazna funkcija.

Kaj pa $A \longrightarrow \emptyset$?

1. $\emptyset \longrightarrow \emptyset$ natanko ena, prazna funkcija
2. A neprazna, imamo neki $a \in A$

   a-ju moramo prirediti neki element iz $\emptyset$.

   Tega ne moremo.

Sklep: če A neprazna, ni preslikave $A \to \emptyset$.

Primer: $\mathcal{P}(\emptyset) = \{\emptyset\}$

$$\mathcal{P}(\emptyset) \longrightarrow \emptyset$$

$$\{\emptyset\} \longrightarrow \{\}$$

?

$$\{\emptyset\} \longrightarrow \emptyset$$

$$\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$7 \longmapsto \mathbb{R}$$

Konstrukcije množic

Kartezični produkt

A, B množici

1. $A \times B$ je množica, imenuje se (kartezični) produkt A in B

2. Elementi $A \times B$ so vsi urejeni pari (a,b), kjer je $a \in A$ in $b \in B$.

$$(a,b) = (c,d) \iff a = c \text{ in } b = d$$

$$(3,4) = (1+2, 7-3) \quad \checkmark$$

$$(4,3) = (1+2, 7-3) \quad \times$$

Primer: $\{7,5,3\} \times \{1,2\} =$

$\{(7,1), (7,2), (5,1), (5,2), \ldots, (3,2)\}$

predavatelj je čuden

Primer: $\{1,2,3\} \times \emptyset = \cancel{\{1,2,3\}}$

$= \emptyset$

Eksponentna množica

B^A množica vseh preslikav iz A v B

$\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ realne funkcije ene spremenljivke

$\{1,2,3,4\}^{\{\Delta,\square\}}$

$\Delta \mapsto 1, \square \mapsto 1$

$\Delta \mapsto 1, \square \mapsto 2$

16 elementov