Opozorilo:

Zakon trihotomije: $|X| < |Y|$ ali $|X| = |Y|$ ali $|Y| < |X|$

Dokaz v zapiskih je povsem napačen.
Prav: zakon trihotomije $\Leftrightarrow$ aksiom izbire.

Kodiranje matematičnih objektov z množicami

- Preslikavo $f : A \to B$ lahko podamo s funkcijsko relacijo, t.j. podmnožica $A \times B$. Torej lahko definiramo

$$B^A = \{ R \subseteq A \times B \mid \forall x \in A . \exists! y \in B . x R y \}$$
$$\subseteq \mathcal{P}(A \times B)$$

- Kvocientna množica X/R, kjer je $R \subseteq X \times X$ ekvivalenčna relacija;

$$X/R = \{ E \subseteq X \mid E \text{ je ekvivalenčni razred za } R \}$$

$$\exists x \in E . \underbrace{\forall y \in X . x R y \Leftrightarrow y \in E}_{E \text{ je ekv. razred } x}$$

Kako kodiramo ostale objekte?

Urejeni par:

$(x,y) :=$?

Vaja: ali bi lahko kodirali takole?

$\{\{0,x\},\{1,y\}\}$

$(1,0) = \{\{0,1\},\{1,0\}\} = \{\{0,1\}\}$

$(0,1) = \{\{0,0\},\{1,1\}\} = \{\{0\},\{1\}\}$

$\{\{0,a\},\{1,b\}\}$

$\{\{1,b\},\{0,a\}\}$

$\{\{1,0\},\{0,a\}\}$

Kuratowski

$(x,y) := \{\{x\},\{x,y\}\}$

$(u,u) = \{\{u\},\{u,u\}\} = \{\{u\}\}$

$A \times B := \{\{\{x\},\{x,y\}\} \mid x \in A, y \in B\}$

Vsota:

$\iota_1(x) := (1,x) = \{\{1\},\{1,x\}\}$

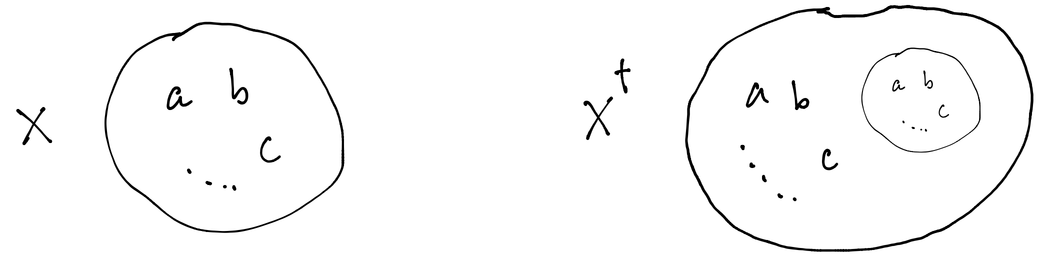
$\iota_2(x) := (2,x) = \{\{2\},\{2,x\}\}$

$A + B = (\{1\} \times A) \cup (\{2\} \times B)$

Naravna števila:

Na množicah definiramo operacijo __naslednik__

$$X^+ = X \cup \{X\}$$



Ali bi se lahko zgodilo $X \in X$?

Ne, po enem od aksiomov.

Naravna števila:

$$0 := \emptyset$$
$$n^+ := n \cup \{n\}$$

Kaj dobimo?

$$0 = \emptyset$$
$$1 = 0^+ = \emptyset \cup \{\emptyset\} = \{\emptyset\}$$
$$2 = 1^+ = \{\emptyset\} \cup \{\{\emptyset\}\} = \{\emptyset, \{\emptyset\}\} = \{0, 1\}$$
$$3 = 2^+ = \{0, 1\} \cup \{2\} = \{0, 1, 2\} = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$$
$$4 = \quad \cdots\cdots \quad = \{0, 1, 2, 3\}$$

Naravno število kodiramo z množico njegovih predhodnikov.

Cela števila

(a,b) predstavlja razliko $a-b$
$a,b \in \mathbb{N}$

$(3,7)$ in $(10,14)$ predstavljata isto celo število

Potrebujemo ekvivalenčno relacijo in naredimo kvocient

$$\mathbb{Z} := \mathbb{N}\times\mathbb{N} / \sim \qquad (a,b)\sim(c,d) \Leftrightarrow a+d=b+c$$

Racionalna števila

(k,m) predstavlja kvocient $\frac{k}{m}$
$k,m \in \mathbb{Z}$, $m \neq 0$

$$\mathbb{Q} := \mathbb{Z} \times \{m \in \mathbb{Z} \mid m \neq 0\} / \approx$$

$$(k,m) \approx (l,n) \Leftrightarrow k\cdot n = m \cdot l$$

Realna števila:

Realno število je Dedekindov rez, t.j. množica racionalnih števil

$$\mathbb{R} \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{Q})$$

Primer:

0 kot naravno število: $\emptyset$

0 kot celo število: $\{ \underbrace{\{\{a\}\}}_{= (a,a)} \mid a \in \mathbb{N} \}$

0 kot racionalno število: $[(0,1)]_{\approx} =$

$$= \{(k,m) \mid k,m \in \mathbb{Z}, m \neq 0, (k,m) \approx (0,1)\}$$

$\hookrightarrow k=0$

$$= \{(0,m) \mid m \in \mathbb{Z}, m \neq 0\}$$

$\sqrt{2} \in$ Cos $\overset{?}{:}$ $\longrightarrow$ funkcijske relacije $\in \mathcal{P}(\mathbb{R} \times \mathbb{R})$

$\downarrow$ Dedekindov rez $\in \mathcal{P}(\mathbb{Q})$

Aksiomi teorije množic

Zermelo - Fraenkelovi aksiomi

1. Ekstenzionalnost:

Množici sta enaki, če imata iste elemente.

$$(\forall x \in \mathrm{Set}.\ x \in A \Leftrightarrow x \in B) \Rightarrow A = B$$

2. Neurejeni par:

Za vsak x in y obstaja množica $\{x,y\}$, ki vsebuje natanko x in y:

$$\forall z \in \mathrm{Set}.\ z \in \{x,y\} \Leftrightarrow z = x \lor z = y$$

3. Unija: Vsaka množica A ima unijo $\bigcup A$, za katero velja:

$$\forall x \in Set.\ x \in \bigcup A \Leftrightarrow \exists B \in A.\ x \in B$$

Opomba: vse je množica; uporaba simbolov $\underbrace{x, y, z}_{\text{"element"}}$, $\underbrace{A, B, C}_{\text{"množica"}}$ je samo didaktični pripomoček.

Lahko bi pisali:

$$\forall x \in Set.\ x \in \bigcup y \Leftrightarrow \exists z \in y.\ x \in z.$$

4. Prazna množica:

Obstaja množica $\emptyset$, za katero velja

$$\forall x \in Set.\ x \in \emptyset \Leftrightarrow \bot$$

$$\forall x \in Set.\ \neg(x \in \emptyset)$$

Katere množice dobimo s prvimi 4 aksiomi?

$\emptyset$

$\{\emptyset, \emptyset\} = \{\emptyset\}$ (enojec $\{a\}$ je okrajšava za $\{a, a\}$)

$\{\emptyset, \{\emptyset\}\}$

$\{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$ $\qquad \{\{\{\emptyset\}\}\}$

$\{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}, \ldots, \{\{\{\{\{\{\{\emptyset\}\}\}\}\}\}\}\}$

Dobimo hereditarno končne množice.

5. Neskončna množica:

Obstaja množica, ki vsebuje $\emptyset$ in je zaprta za operacijo naslednik:

$$X^+ = X \cup \{X\}$$

- enojec $\{x\}$ obstaja po aksiomu o neurejenem paru
- $X \cup \{x\} = \bigcup A$ kjer je $A = \{X, \{x\}\}$, ki jo lahko tvorimo po aksiomu o neurejenem paru.

S formulo:

$$\exists A \in Set.\ \emptyset \in A \wedge \forall B \in A.\ B^+ \in A.$$

Taka množica je neskončna:

$0 = \emptyset \in A$ ✓

$1 = 0^+ \in A$ ✓

$2 = 1^+ \in A$ ✓

$\vdots$

6. Podmnožica

Za vsako množico A in formulo φ obstaja množica $\{x \in A \mid \varphi(x)\}$, za katero velja

$$\forall y \in Set.\ y \in \{x \in A \mid \varphi(x)\} \Leftrightarrow y \in A \wedge \varphi(y)$$

7. Potenčna množica:

Za vsako množico A obstaja množica $P(A)$, za katero velja

$$\forall x \in Set.\ x \in P(A) \Leftrightarrow \underbrace{x \subseteq A}_{\substack{\text{okrajšava za} \\ \forall y \in x.\ y \in A}}$$

Primer:

$$A \times B = \{ p \in P(P(A \cup B)) \mid \exists a \in A . \exists b \in B .\ \underbrace{p}_{\in P(P(A \cup B))} = \{ \underbrace{\{a\}}, \underbrace{\{a,b\}}_{\subseteq A \cup B} \} \}$$

✓

Uporabili smo aksiome: 2, 3, 7, 6

8. Aksiom o zamenjavi:

Če je A množica in $f : A \to Set$ preslikava, obstaja množica $\{ f(x) \mid x \in A \}$, da velja

$$\forall y \in Set.\ y \in \{ f(x) \mid x \in A \} \Leftrightarrow \exists a \in A .\ y = f(a)$$

9. Dobra osnovanost:

Relacija $\in$ na razredu Set je dobro osnovana.

Posledica: množica ne more biti svoj element.
Če bi imeli $A \in A$, bi imeli cikel za $\in$,
to pa ni možno, ker je $\in$ dobro osnovana.

10. Aksiom izbire:

Družina nepraznih množic ima funkcijo izbire.

Ekvivalentno:

$$\underbrace{(\forall B \in A \,.\, B \neq \emptyset)}_{A \text{ je množica nepraznih množic}} \Rightarrow \underbrace{\exists f : A \to \bigcup A \,.\, \forall B \in A \,.\, f(B) \in B}_{f \text{ je funkcija izbire za } A}.$$