Veliki kardinali

Def: Kardinalno število κ je <u>močna limita</u>, če $\forall \lambda < \kappa .\ 2^{\lambda} < \kappa$.

Primeri: • $\aleph_0$ je močna limita
- Močna limita je limitni kardinal (ker $\aleph_{\alpha+1} \leq 2^{\aleph_\alpha}$).
- Za vsak κ je $\lambda = \sup\{\kappa, 2^{\kappa}, 2^{2^{\kappa}}, 2^{2^{2^{\kappa}}}, \ldots\}$ močna limita nad κ.

  $\mathrm{cf}\,\lambda = \omega$ zato λ je singularen za $\kappa \geq \aleph_0$.

Def: <u>Šibko nedostopno število</u> (nedosegljiv) je limitni neštevni regularni kardinal.

<u>Nedostopno število</u> je neštevn regularen kardinal, ki je močna limita.

ZFC in nedostopni kardinali.

Denimo, da je κ nedostopen kardinal. Opazujmo V_κ.

$$\kappa \leq \left|V_\kappa\right| = \left|\bigcup_{\alpha<\kappa} V_\alpha\right| \leq \sum_{\alpha<\kappa} |V_\alpha| \leq \kappa \cdot \sup_{\alpha<\kappa} |V_\alpha| \leq \kappa \cdot \kappa = \kappa$$

razmislek

indukcija: $\forall \alpha<\kappa \,.\, |V_\alpha|<\kappa$

(razmislek)

- $|V_{\alpha+1}| = 2^{|V_\alpha|} < \kappa$

  ker $|V_\alpha| < \kappa$

  κ močna limit

- $|V_\beta|$ β limitni

  (uporabimo κ regular

Izrek: κ nedostopen $\Rightarrow$ V_κ je model ZFC

Oris dokaza:

1) Potenčna: $A \in V_\kappa \Rightarrow P(A) \in V_\kappa$ ja, ker $\underline{\kappa \text{ limitni}}$

2) Unija: $A \in V_\kappa \Rightarrow \exists \alpha < \kappa .\ A \in V_\alpha$

$\Rightarrow \bigcup A \in V_{\alpha+1}$ (razmisli)

$\Rightarrow \bigcup A \in V_\kappa$

3) Zamenjava: $\forall A \in V_\kappa\ \forall f : A \to V_\kappa .\ f[A] \in V_\kappa$

Denimo $A \in V_\kappa$ in $f : A \longrightarrow V_\kappa$. Slika $f[A] := \{ y \mid \exists x \in A .\ y = f(x) \}$

$= \bigcup \{ \{f(x)\} \mid x \in A \}$

Opazimo $A \xrightarrow{g} \mathrm{Ord}$

$g : x \longmapsto \mathrm{rang}(f(x))$, $f(x) \in V_{g(x)}$ $\quad g(x) < \kappa$

$|A| < \kappa \Rightarrow \sup\limits_{x \in A} g(x) < \kappa$ ker $\underline{\kappa \text{ regularen}} \Rightarrow \exists \beta < \kappa .\ \forall x \in A .\ f(x) \in V_\beta$

- Če obstaja nedostopen κ $\Rightarrow$ ZFC dokaže, da ZFC ima model (namreč V_κ).

- Gödel za ZFC: Če je ZFC neprotisloven, potem ZFC ne dokaže, da ZFC ima model.

Posledica: $\xRightarrow{\text{ZFC neprotisloven}}$ ZFC ne dokaže "$\exists$ nedostopen κ"

Če bi ZFC dokazal obstoj nedostopnega κ, bi dokazal obstoj svojega modela, Gödel pravi, da to ne gre.