Merljivi kardinali

<u>Lema</u>: Denimo, da je κ najmanjši kardinal, na katerem obstaja neki netrivialni σ-poln ultrafilter, recimo mu $\mathcal{U}$. Tedaj je $\mathcal{U}$ κ-poln.

~~Lema: Denimo da je κ najmanjši netrivialen σ-poln ultrafilterom. Naj bo $\mathcal{U}$ tak netrivialen σ-poln ultrafilter na κ. Tedaj je $\mathcal{U}$ κ-poln.~~

$\mathcal{U} \subseteq \mathcal{P}(\kappa)$

$X_\alpha \subseteq \kappa$

Dokaz: Denimo, da $\mathcal{U}$ ne bi bil κ-poln. To pomeni: obstaja $\gamma < \kappa$ in particija $\{X_\alpha\}_{\alpha<\gamma}$ množice κ, tako da

$$\forall \alpha < \gamma .\ X_\alpha \notin \mathcal{U}$$

Definiramo $f : \kappa \to \gamma$,

$$f(x) = \text{tisti } \alpha < \gamma \text{, za katerega je } x \in X_\alpha$$

f je surjektivna, ker $\bigcup_{\alpha<\gamma} X_\alpha = \kappa$ in $X_\alpha \neq \emptyset$. (brez škode za splošnost)

> Vaja $f : X \to Y$
> $\mathcal{U} \subseteq P(X)$ ultrafilter
> $\mathcal{V} = \{ A \subseteq Y \mid f^*(A) \in \mathcal{U} \}$
> $\Rightarrow$ $\mathcal{V}$ ultrafilter ?

- Definiramo $\mathcal{V} \subseteq P(\gamma)$

$$\mathcal{V} := \{ A \subseteq \gamma \mid f^*(A) \in \mathcal{U} \}$$

- Tedaj je $\mathcal{V}$ ultrafilter (vaja)
- $\mathcal{V}$ ni glavni ultrafilter:
  denimo, da bi imeli $\alpha < \gamma$ in $\{\alpha\} \in \mathcal{V}$, to bi pomenilo
  $X_\alpha = f^*(\{\alpha\}) \in \mathcal{U}$, kar ni res.
- $\mathcal{V}$ je σ-poln: naj bo $\{Y_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ particija γ.
  Tedaj je $\{f^*(Y_n)\}_{n \in \mathbb{N}}$ particija K. Ker je $\mathcal{U}$ σ-poln,
  sledi da za neki n velja $f^*(Y_n) \in \mathcal{U}$, torej $Y_n \in \mathcal{V}$,

$\blacksquare$

Kako veliki so merljivi kardinali?

Sklep: $\exists$ dvojiška mera $\Leftrightarrow$

$\exists$ σ-poln netrivialen ultrafilter $\Leftrightarrow$

$\exists$ $\kappa \in Card$ in κ-poln ultrafilter na κ, netrivialen, $\kappa \geq \aleph_1$

Def: Kardinalno število κ je merljivo, če je neštevno in na κ obstaja netrivialen κ-poln ultrafilter.

Izrek: Merljivi kardinali so nedosegljivi.

Dokaz: Denimo, da je κ merljiv.

1). κ je neštevan ✓

2) κ je regularen ?

3) κ je močna limita ?

Naj bo $\mathcal{U}$ netrivialen κ-poln ultrafilter na κ.

- Opazka: če je $A \in \mathcal{U}$, potem $|A| = \kappa$. Denimo $|A| < \kappa$:

$$A = \underbrace{\bigcup_{x \in A} \{x\}}_{\substack{\text{unija manj kot} \\ \kappa \text{ množic, ki} \\ \text{niso v } \mathcal{U}}} \notin \mathcal{U}$$

2) κ je regularen: Če bi bil κ singularen, bi ga lahko zapisali kot

$$\mathcal{U} \ni \kappa = \underbrace{\bigcup_{\alpha < \gamma} A_\alpha}_{\substack{\text{unija manj kot } \kappa \text{ množic,} \\ \text{vsaka od njih ima moč} < \kappa\text{, torej ni v } \mathcal{U} \\ \text{po opazki.}}}, \quad \overset{A_\alpha < \kappa}{|A_\alpha| < \kappa}, \quad \gamma < \kappa$$

Protislovje, ker $\kappa \in \mathcal{U}$, vendar $\bigcup_{\alpha < \gamma} A_\alpha \notin \mathcal{U}$.

2) Če bi bil κ singularen, bi ga lahko napisali kot <u>particijo</u>

$$\kappa = \bigcup_{\alpha<\gamma} A_\alpha, \qquad A_\alpha \subseteq \kappa, \quad \gamma < \kappa, \quad |A_\alpha| < \kappa$$

(vaja: zakaj lahko A_α vzamemo paroma disjunktne?)

Tedaj $\bigcup_{\alpha<\gamma} A_\alpha = \kappa \in \mathfrak{U}$ zato obstaja $\alpha < \gamma$, da $A_\alpha \in \mathfrak{U}$, torej po opazki $|A_\alpha| = \kappa$, protislovje.

· 3) κ je močna limita. Naj bo $\lambda < \kappa$, dokažimo $2^\lambda < \kappa$.
Denimo, da bi imeli $\kappa \leq 2^\lambda$.
Tedaj bi obstajala injektivna $f : \kappa \to {}^\lambda 2$.
Za $\alpha < \lambda$ definiramo

$$A_{\alpha,0} := \{ x \in \kappa \mid f(x)(\alpha) = 0 \}$$

$$A_{\alpha,1} := \{ x \in \kappa \mid f(x)(\alpha) = 1 \}$$

Ker je $A_{\alpha,0} \cup A_{\alpha,1} = \kappa$ in $A_{\alpha,0} \cap A_{\alpha,1} = \emptyset$ je bodisi $A_{\alpha,0} \in \mathcal{U}$ bodisi $A_{\alpha,1} \in \mathcal{U}$. Definiramo $b : \lambda \to 2$

$$b_\alpha := \begin{cases} 0 & \text{če } A_{\alpha,0} \notin \mathcal{U} \\ 1 & \text{če } A_{\alpha,1} \notin \mathcal{U} \end{cases}$$ torej $A_{\alpha, b_\alpha} \notin \mathcal{U}$ za $\alpha < \lambda$

Bodi $B_\alpha := A_{\alpha, b_\alpha}$, torej $B_\alpha \notin \mathcal{U}$ za $\alpha < \lambda$.

- Opazujmo $\bigcup_{\alpha<\lambda} B_\alpha$; oziroma kdaj $x \notin \bigcup_{\alpha<\lambda} B_\alpha$?

$$\begin{aligned} x \notin \bigcup_{\alpha<\lambda} B_\alpha &\iff \forall \alpha<\lambda .\ x \notin B_\alpha = A_{\alpha, b_\alpha} \\ &\iff \forall \alpha < \lambda .\ f(x)(\alpha) = 1-b_\alpha \\ &\iff f(x) = (\alpha \mapsto 1-b_\alpha) \end{aligned}$$

Ker je f injektivna, obstaja največ en x, ki ga f preslika v funkcijo $\alpha \mapsto 1-b_\alpha$. Torej obstaja največ en x, ki ni v $\bigcup_{\alpha<\lambda} B_\alpha$. Torej je

$$\bigcup_{\alpha<\lambda} B_\alpha = \kappa \qquad \text{ali} \qquad \bigcup_{\alpha<\lambda} B_\alpha = \kappa \setminus \{x\} \text{ za neki } x \in \kappa$$

V obeh primerih $\bigcup_{\alpha<\lambda} B_\alpha \in \mathcal{U}$, hkrati vemo $B_\alpha \notin \mathcal{U}$.

Protislovje, ker $\lambda < \kappa$ in $\mathcal{U}$ κ-poln. ∎

Izrek: Pod merljivim kardinalom κ je κ nedosegljivih kardinalov.