Kardinalna števila so predstavniki razredov ekvipolentnosti

Izrek: Za vsako množico A obstaja natanko en $\kappa \in \mathrm{Card}$, da $A \cong \kappa$.

Dokaz: Enoličnost κ sledi iz: Če $\lambda, \mu \in \mathrm{Card}$ in $\mu \cong \lambda \Rightarrow \mu = \lambda$.

Naj bo

izomorfna dobra ureditev

$$C = \{\alpha \in \mathrm{Ord} \mid \exists \text{ dobra ureditev } R \text{ množice } A,\ (A,R) \cong (\alpha, \in)\}$$

C je neprazen, ker lahko A dobro uredimo (po AC).

Naj bo $\kappa = \min C$. Torej je $\kappa \cong A$ (kot množica), bijekcija $f : A \to \kappa$

Ali je $\kappa \in \mathrm{Card}$? Naj bo $\beta < \kappa$. Če bi imeli bijekcijo $g : \kappa \to \beta$:

$$A \xrightarrow{f} \kappa \xrightarrow{g} \beta$$

Na A definiramo dobro ureditev R: $x R y \Leftrightarrow g(f(x)) \in g(f(y))$

Ker $(A,R) \cong (\beta, \in)$, sledi $\beta \in C$ in $\beta < \kappa = \min C$, protislovje.

Def: Kardinalnost množice A je tisti kardinal $|A| \in \mathrm{Card}$, da

$$A \cong |A|.$$

Kardinalna aritmetika

Def: $\kappa + \lambda = |\kappa \oplus \lambda|$ $\qquad A \oplus B = \{0\} \times A \cup \{1\} \times B$

$\kappa \cdot \lambda = |\kappa \times \lambda|$

$\kappa^{\lambda} = |{}^{\lambda}\kappa|$ $\qquad {}^{B}A = \{ f \subseteq A \times B \mid f \text{ funkcija} \}$

Pozor: te operacije se razlikujejo od ordinalne aritmetike !!

Operacije $\oplus$, $\times$, ${}^{A}B$ so kongruence za $|-|$, to je:

$$|A| = |A'| \text{ in } |B| = |B'| \Rightarrow \begin{array}{l} |A \oplus B| = |A' \oplus B'| \\ |A \times B| = |A' \times B'| \\ |{}^{A}B| = |{}^{A'}B'| \end{array}$$

Izrek: $|\mathcal{P}(A)| = 2^{|A|}$.

Dokaz: Ker je $\mathcal{P}(A) \cong {}^{A}2$, $|\mathcal{P}(A)| = |{}^{A}2| = |{}^{|A|}2| = 2^{|A|}$.

χ

$\chi_S(x) = \begin{cases} 1 & x \in S \\ 0 & x \notin S \end{cases}$ karakteristična funkcija $S \subseteq A$.

Kateri ordinali so kardinali?

$0, 1, 2, 3, 4, \ldots \in \mathrm{Card}$

$\omega \in \mathrm{Card}$, $\omega + 1 \notin \mathrm{Card}$, $\omega \times \omega \notin \mathrm{Card}$,

Izrek: (a) Vsak kardinal ima naslednika

(b) Supremum množice kardinalov (izračunan v Ord) je kardinal.

Dokaz:

(a) Naj bo κ kardinal. Iščemo tak $\lambda \in \mathrm{Card}$, da je $\kappa < \lambda$ in če $\mu \in \mathrm{Card}$, $\kappa < \mu$, potem $\lambda \leq \mu$.

Takega naslednika označimo s κ^+ (pozor, $x^+ = x \cup \{x\}$ je še ena notacija).

Naj bo $C = \{\lambda \in \mathrm{Card} \mid \kappa < \lambda\}$. Tedaj $\kappa^+ = \min C$, saj je C neprazen: po Cantorju je $\kappa < 2^\kappa \in C$.

$[\ \kappa \prec \mathcal{P}(\kappa) \cong {}^{\kappa}2\ ]$

• (b) Naj bo $S \subseteq \mathrm{Card}$, množica in
$\alpha = \sup S = \bigcup S$. Dokazujemo, da je $\alpha \in \mathrm{Card}$.

Naj bo $\beta < \alpha$. Če bi imeli bijekcijo $f : \beta \to \alpha$:

$$\beta < \alpha = \sup S \Rightarrow \exists \gamma \in S.\ \beta < \gamma \leq \alpha.$$

[Če ignoriramo $\emptyset$.]

$$\begin{tikzcd} \beta \arrow[d, phantom, "\cap"] \arrow[dr, "\text{bijekcija}"] & \\ \gamma \arrow[r, phantom, "\subseteq"] & \alpha \end{tikzcd}$$

Imamo: $\beta \lesssim \gamma$

in

$\gamma \lesssim \beta$ ker

$$\overbrace{\gamma \xrightarrow[\subseteq]{} \alpha \xrightarrow[\text{bij}]{} \beta}^{\text{injekcija}}$$

Po Cantor-Schröder-Bernstein: $\beta \cong \gamma$, kar ne gre, ker
$\beta < \gamma \in S \subseteq \mathrm{Card}$.

Torej ni bijekcije $\beta \to \alpha$, $\alpha \in \mathrm{Card}$. ∎

Alefi

$\aleph \quad \aleph \quad \aleph \quad \aleph \quad \aleph \quad \aleph$

Def:
$$\aleph_0 = \omega$$
$$\aleph_{\alpha+1} = \aleph_\alpha^+ \qquad \text{(naslednik kardinal)}$$
$$\aleph_\beta = \bigcup_{\alpha<\beta} \aleph_\alpha \qquad \beta \text{ limitni}$$

Card tvori ~~pravi~~ razred

Kateri ordinal je $\aleph_1$?

Cantorjeva hipoteza

Ali je $2^{\aleph_0} = \aleph_1$?

Ali je vsak kardinal enak nekemu $\aleph_\alpha$?