Kardinalna števila

Def: Množici A in B imata <u>enako moč</u> (ekvipolentni, izomorfni), če obstaja bijekcija $f: A \to B$, pišemo $A \cong B$.

<u>Izrek</u>: $\cong$ je ekvivalenčna relacija.

<u>Izrek</u>: $A \times B \cong B \times A$

$A \times 1 \cong A$

$A^{B \times C} \cong (A^B)^C$ $\qquad A^B = \{f \subseteq A \times B \mid f \text{ funkcija}\}$

itd.

<u>Def</u>: $A \lesssim B \Leftrightarrow$ obstaja injektivna $f: A \to B$

<u>Izrek</u>: $\lesssim$ je refleksivna in tranzitivna

<u>Izrek</u>: $A \lesssim B \Leftrightarrow A = \emptyset \lor \exists$ surjektivna $g: B \to A$

$(\exists f: A \to B.\ f \text{ injektivna}) \Leftrightarrow$ –||–

Dokaz

$\boxed{\Rightarrow}$ Denimo $A \lesssim B$, se pravi $f : A \to B$ injektivna.

1) $A = \emptyset$ ✓

2) $A \neq \emptyset$, $x_0 \in A$, Definiramo $g : B \to A$

$$g(y) = \begin{cases} f^{-1}(y) & \text{če } y \in f[A] \\ x_0 & \text{sicer} \end{cases}$$

g očitno surjektivna: $g(f(x)) = x$

$U \subseteq X \xrightarrow{f} Y$

$\cancel{f(U)}$ $f[U]$ slika

$f(x)$ $f_*(U)$ $f^{-1}[U]$

$\cancel{f^{-1}(V)}$ inverzna slika

$f^{-1}(y)$ $f^*(U)$

$f^{-1} = \{(y,x) \mid (x,y) \in f\}$

$\boxed{\Leftarrow}$ $A = \emptyset$

1) $\cancel{A \neq \emptyset}$ $\Rightarrow$ obstaja injektivna $A \to B$ ✓

2) $g : B \to A$ surjektivna, iščemo $f : A \to B$ injektivna

f je funkcija izbire za družino $\{g^{-1}(a)\}_{a \in A}$. ∎

(AC!)

$f : A \to B$

Poskus: $f(a) \in g^{-1}(a)$

Kaj vse ni izbira

Logična pravila za $\exists$:

$$\frac{\varphi(a)}{\exists x . \varphi(x)}$$

$$\frac{\exists x . \varphi(x) \qquad \begin{array}{c} \varphi(x) \\ \vdots \\ \psi \end{array}}{\psi}$$

x se ne pojavi v ψ.

Predp: $\exists \cancel{x} . \cancel{x_0} \in A$

Dokaz.: $\exists g : B \to A . g$ surj.

Naj bo $x_0 \in A$.

$\vdots$

$\underline{\underline{g}}$ $\quad$ g surjektivna

je odvisna od x_0!

$\exists g : B \to A .\ g$ surjektiven.

Predpostavka: $\exists x . \varphi(x)$

Radi bi dokazali ψ.

Naj bo x tak da velja $\varphi(x)$.

$\vdots$

Torej ψ.

$$\frac{\exists x_0 . x_0 \in A \qquad \dfrac{\begin{array}{c} \overline{x_0 \in A} \\ \vdots \\ g_{x_0} \quad g \text{ surjektiven} \\ \vdots \end{array}}{\exists g' : B \to A .\ g' \text{ surjektiven}}}{\exists g' : B \to A .\ g' \text{ surj}} \quad \checkmark$$

Kaj je izbira

$\{A_i\}_{i\in I} \qquad \forall i\in I.\ \exists a.\ a\in A_i$

$f : I \to \bigcup_{i\in I} A_i \qquad \boxed{f(i)\in A_i}$

$f \subseteq I \times \bigcup_{i\in I} A_i \qquad f = \{(x,y) \mid x\in I \wedge y\in A_i\}\ ?$

$i\in I \qquad j\in I \qquad h\in I$

$\exists a\in A_i \qquad \exists b\in A_j \qquad \exists c\in A_h$

$f(i)=a \qquad f(j)=b \qquad f(h)=c$

$i\in I$

$\cancel{\exists a_i\in A_i}$

a_i

$\exists x.\ \varphi(x) \qquad \cancel{\varepsilon(\varphi)}$

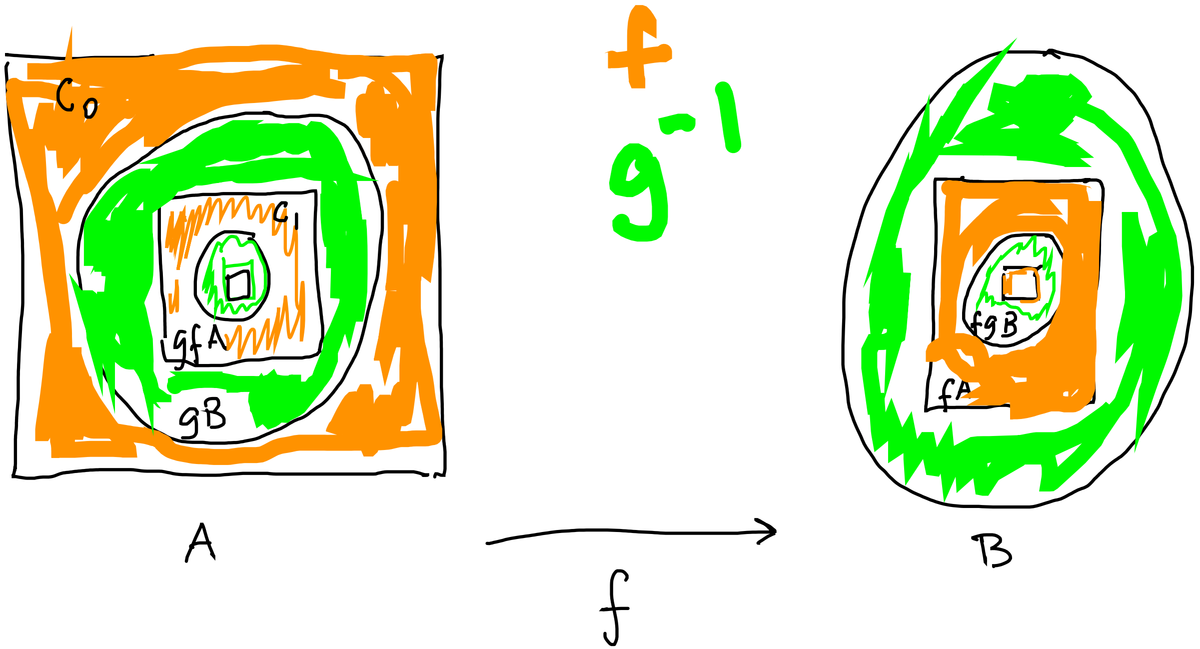
$\varepsilon(x, \varphi(x))$

$f(i) = \cancel{\varepsilon A}\ \varepsilon(x.\ x\in A_i)$

Cantor-Schröder-Bernstein

<u>Izrek:</u> $A \lesssim B$ in $B \lesssim A \Rightarrow A \cong B$

<u>Dokaz:</u> $f: A \to B$ $g: B \to A$ injektivni imamo



$C_0 = A \setminus g[B]$

$C_{n+1} = g[f[C_n]]$

$C = \bigcup_{n \in \omega} C_n$

Definiramo $h: A \to B$

$$h(a) = \begin{cases} f(a), & a \in C \\ g^{-1}(a), & a \notin C \end{cases}$$

h je bij: Wikipedia, video LMN sami.

Če $a \notin C$, $a \notin C_0 \Rightarrow a \in g[B]$, h dobro def.

Cantorjev izrek

__Def__: $A \precnsim B \iff A \precsim B$ in $A \not\approx B$

Po CSB izreku: $A \precnsim B \iff A \precsim B$ in $B \not\precsim A$.

__Izrek__ (Cantor): $A \precnsim \mathcal{P}(A)$.

Dokaz: 1) $A \precsim \mathcal{P}(A)$: injektivna $\begin{array}{l} A \to \mathcal{P}(A) \\ x \mapsto \{x\} \end{array}$ ✓

2) $\mathcal{P}(A) \not\precsim A$ Dokažemo: $\neg\,(\underbrace{\mathcal{P}(A) = \emptyset}_{\perp} \lor \exists$ surjekcija $A \to \mathcal{P}(A))$.

$\neg \exists$ surjekcija $A \to \mathcal{P}(A)$

Naj bo $g : A \to \mathcal{P}(A)$ poljubna. Definiramo

$S := \{x \in A \mid x \notin g(x)\}$. Trdimo $\neg \exists y \in A \,.\, g(y) = S$.

Predpostavimo, da bi veljalo $g(y) = S$ za neki $y \in A$. Velja $y \in S$ ali $y \notin S$.

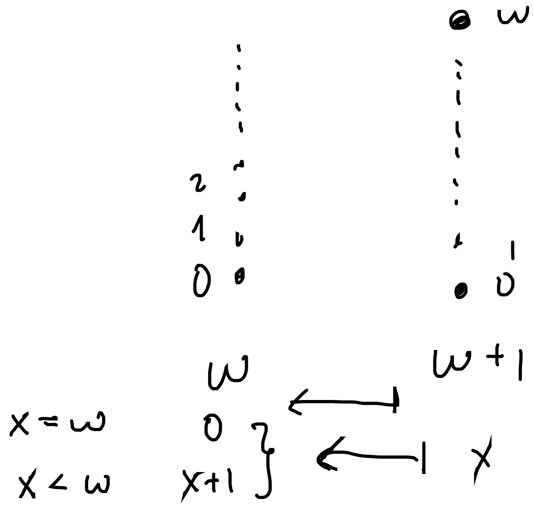
1) $y \in S \overset{\text{def } S}{\Longrightarrow} y \notin g(y) = S \Rightarrow \perp$

2) $y \notin S = g(y) \Longrightarrow y \in S \Rightarrow \perp$

$\blacksquare$

Kardinalna števila

$3 \not\cong 4$ $\qquad 4 \not\cong \omega$ $\qquad \omega \cong \omega + 1 \cong \omega \times \omega$



<u>Def</u>: <u>Kardinalno število</u> je tako ordinalno število, ki ni v bijekciji z nobenim od svojih predhodnikov.

$$\mathrm{Card} = \{ \alpha \in \mathrm{Ord} \mid \forall \beta < \alpha .\ \neg \exists f : \alpha \to \beta .\ f \text{ bijekcija} \}$$

Kardinale označimo $\kappa, \lambda, \mu, \nu, \ldots$ $\qquad$ Ordinali $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \ldots$