Rang (rank?)

$$\mathrm{rang}(x) := \min\{\alpha \in \mathrm{Ord} \mid x \in V_{\underline{\alpha+1}}\}$$

popravek

$\mathrm{rang}(\emptyset) = 0$ $\qquad$ $\mathrm{rang}(\omega) = \omega$

Modeli

Aksiomi ZFC opisujejo $(V, \in)$.

(1) Vzemimo ZFC brez aksioma o neskončni množici in dodamo njegovo negacijo:

$$\neg \exists x.\ \emptyset \in x \wedge \forall y.\ y \in x \Rightarrow y \cup \{y\} \in x.$$

Odgovor: $(V_\omega, \in)$ ali ta zadošča aksiomom $\mathrm{ZFC} - \infty + \neg\infty$?

1) $\emptyset \in V_\omega$ "$\exists x. \forall y. \neg(y \in x)$"

$\exists x \in V_\omega . \forall y \in V_\omega . \neg(y \in x)$

2) "$\forall x, y . \exists z , \forall w . (w \in z \Leftrightarrow w = x \lor w = y)$"

$\forall x, y \in V_\omega \ \exists z \in V_\omega . \forall w \in V_\omega . (w \in z \Leftrightarrow w = x \lor w = y)$?

$x, y \in V_\omega = \bigcup_{n \in \omega} V_n$ $\quad x \in V_m \quad y \in V_n$

$z = \{x, y\}$ $\quad \{x, y\} \in V_{max(m,n)+1}$

3) Potenca: če $x \in V_\omega$, potem $\mathcal{P}(x) \in V_\omega$:

$\forall x \in V_\omega \ \exists y \in V_\omega \ \forall z \in V_\omega . (z \in y \Leftrightarrow z \subseteq x)$

~~$x \in V_\omega$, $z \subseteq x \Rightarrow z \in \mathcal{P}(x)$~~ ✓

- Naj bo $x \in V_\omega$. Za y vzemimo $\mathcal{P}(x)$, ki je v V_ω.

Preverimo:

$$\forall z \in V_\omega . \left(z \in \mathcal{P}(x) \Leftrightarrow z \subseteq x \right)$$

Naj bo $z \in V_\omega$:

$\boxed{\Rightarrow}$ $z \in \mathcal{P}(x)$ očitno $z \subseteq x$.

$\boxed{\Leftarrow}$ $z \subseteq x$ očitno $z \in \mathcal{P}(x)$.

relativiziran

Kaj je Ord v V_ω? $\mathrm{Ord}^{V_\omega} = \omega$

$\omega \subseteq V_\omega$ $\omega \notin V_\omega$

<u>Posledica</u>: Iz preostalih aksiomov ZFC ne moremo dokazati aksioma o neskončni množici.

- Ali velja "$\neg \exists x.\ \emptyset \in x \wedge \forall y.\ y \in x \Rightarrow y \cup \{y\} \in x$"?

$$\neg \exists x \in V_\omega.\ \emptyset \in x \wedge \forall y \in V_\omega.\ y \in x \Rightarrow y \cup \{y\} \in x.$$

→ Spomnimo se: vsaka induktivna vsebuje ω kot podmnožico.

Npr. da bi V_ω vseboval induktivno množico x (glede na V_ω):

$$x \in V_\omega \quad \text{in} \quad \emptyset \in x \quad \text{in} \quad \forall y \in V_\omega.\ y \in x \Rightarrow y \cup \{y\} \in x.$$

Ali je x induktivna? $\emptyset \in x$ ✓

$\forall y.\ y \in x \Rightarrow y \cup \{y\} \in x$?

Naj bo $y \in x$ poljuben.

Tedaj $y \in V_\omega$, ker V_ω tranzitiven.

Torej $y \cup \{y\} \in x$ ✓

Torej $\omega \subseteq x \in V_\omega \Rightarrow \omega \subseteq x \in V_n \Rightarrow \omega \in V_{n+1} \subseteq V_\omega$ $\rightarrow\leftarrow$

Primer $V_{\omega+\omega}$ zadošča katerim aksiomom?

$$V_{\omega+\omega} = V_\omega \cup P(V_\omega) \cup P(P(V_\omega)) \cup \dots$$

$\omega \in V_{\omega+1}$

$P(\omega) \in V_{\omega+2}$

$$x \in V_{\omega+n} \Rightarrow P(x) \in V_{\omega+n+1}$$

Aksiom o zamenjavi ni veljaven v $V_{\omega+\omega}$.

Ideja: s transfinitno rekurzijo definiramo

$$f(0) = \omega$$
$$f(n+1) = P(f(n))$$

Slika $f[\omega] = \{ \omega, P(\omega), P(P(\omega)), P(P(P(\omega))), \dots \}$

$\omega \in V_{\omega+1}$, $P(\omega) \in V_{\omega+2}$, $P(P(\omega)) \in V_{\omega+3}$, …

$f[\omega] \notin V_{\omega+n}$, $\quad f[\omega] \subseteq V_{\omega+\omega} \Rightarrow f[\omega] \in V_{\omega+\omega+1}$

- <u>Primer</u>:

  Če imamo $(V, \in)$, ki zadošča ZF, ali lahko naredimo model, ki zadošča ZFC?

  <u>Posledica</u>: Če ZF neprotisloven $\Rightarrow$ ZFC neprotisloven.

  "AC ne more biti kriv za protislovje!"

  Gödel, model L (konstruktibilni univerzum).

model ZF $\Longrightarrow$ model ZF + $\neg$AC? Cohen.

$x = \{x\}$

$\{\{\{\{\ldots\}\}\}\}$

<u>Primer</u>: ZFC − regularnosti model V,
Ali lahko dobimo model za ZFC? Da,
vzamemo model $W = \bigcup_{\alpha \in \mathrm{Ord}} V_\alpha$.