Kumulativna hierarhija

S transfinitno rekurzijo za $\alpha \in \mathrm{Ord}$:

$$V_{\alpha+1} = \mathcal{P}(V_\alpha)$$

$$V_\beta = \bigcup_{\alpha<\beta} V_\alpha \qquad \beta \text{ limitni}$$

Dobimo:

$V_0 = \emptyset \qquad V_1 = \mathcal{P}(V_0) = \{\emptyset\} \qquad V_2 = \mathcal{P}(\{\emptyset\}) = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$

$V_3 = \mathcal{P}(\{\emptyset, \{\emptyset\}\}) = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$

velikost $V_n = \underbrace{2^{2^{\cdot^{\cdot^{2^0}}}}}_{n \text{ dvojk}}$, $n \geq 0$

V_ω neskončna, njeni elementi so končni.

Kumulativna hierarhija

Izrek: (a) V_α je tranzitivna za vse $\alpha \in \mathrm{Ord}$.

(b) Če je $\alpha < \beta$, potem $V_\alpha \subsetneq V_\beta$.

(c) $\alpha \subseteq V_\alpha$

S tranzitivna $\Leftrightarrow$

- $x \in S \Rightarrow x \subseteq S$
- $\bigcup S \subseteq S$

Dokaz:

(a) Indukcija:

- naslednik: V_α tranzitivna $\Rightarrow$ $\underset{\mathcal{P}(V_\alpha)}{\underset{\parallel}{V_{\alpha+1}}}$ tranzitivna

S tranzitivna $\Rightarrow \mathcal{P}(S)$ tranzitivna?

$x \in \mathcal{P}(S) \Rightarrow x \subseteq S$

$\forall z \in x.\ z \in S$

$\forall z \in x.\ z \subseteq S$ } S tranzitivna

$\forall z \in x.\ z \in \mathcal{P}(S)$ ✓

- β limitni, $\forall \alpha < \beta . V_\alpha$ tranzitivna $\overset{?}{\Rightarrow}$ V_β tranzitivna

$$x \in V_\beta = \bigcup_{\alpha < \beta} V_\alpha \Rightarrow \exists \alpha < \beta . \; x \in V_\alpha$$

V_α tranzitivna

$$x \subseteq V_\alpha$$

$$x \subseteq V_\alpha \subseteq V_\beta \quad \checkmark$$

(b) $\alpha < \beta \Rightarrow V_\alpha \subsetneq V_\beta$

Dokažemo: $\alpha \leq \beta \Rightarrow V_\alpha \subseteq V_\beta$ indukcija po β:

- naslednik: $\forall \alpha \leq \beta + 1 . \; V_\alpha \subseteq V_{\beta+1}$ dokazujemo, vemo $\forall \gamma \leq \beta . V_\gamma \subseteq V_\beta$

– če $\alpha = \beta + 1$, $V_\alpha = V_{\beta+1}$ ✓

– če $\alpha < \beta + 1$: $\alpha \leq \beta \Rightarrow V_\alpha \subseteq V_\beta \subseteq \mathcal{P}(V_\beta) = V_{\beta+1}$

V_β tranzitivna

- β limitni: i.h. $\forall \gamma < \beta .\ \forall \alpha \leq \gamma .\ V_\alpha \subseteq V_\gamma .$

  dokazujemo: $\forall \alpha \leq \beta .\ V_\alpha \subseteq V_\beta .$

  - če $\alpha = \beta$ ✓
  - če $\alpha < \beta$: $V_\beta = \bigcup_{\alpha' < \beta} V_{\alpha'} \supseteq V_\alpha .$

Še: $\alpha < \beta \Rightarrow V_\alpha \neq V_\beta .$ $\quad V_\alpha \in V_{\alpha+1}$ in $V_\alpha \notin V_\alpha .$

$$\alpha < \beta \Rightarrow \alpha + 1 \leq \beta \Rightarrow V_\alpha \in V_{\alpha+1} \underset{\text{že vemo}}{\subseteq} V_\beta$$

$$V_\alpha \in V_\beta \setminus V_\alpha .$$

(c) $\alpha \subseteq V_\alpha$. Indukcija:

- naslednik: $\alpha + 1 = \alpha \cup \{\alpha\} \overset{\text{i.h.}}{\subseteq} V_\alpha \cup \{\alpha\} \subseteq V_\alpha \cup \mathcal{P}(V_\alpha)$

  $\{\alpha\} \subseteq \mathcal{P}(V_\alpha)$

  $= V_\alpha \cup V_{\alpha+1} = V_{\alpha+1}$

- limitni: $\beta = \bigcup_{\alpha < \beta} \alpha \overset{\text{I.H.}}{\subseteq} \bigcup_{\alpha < \beta} V_\alpha = V_\beta .$ ∎

- Tranzitivno zaprtje: $\bigcup S \subseteq S$

Izrek: Vsaka množica je podmnožica neke tranzitivne množice.

Dokaz: Naj bo S množica.

Definiramo:
$$S_0 := S$$
$$S_{n+1} := \bigcup S_n$$
$$TC(S) := \bigcup_{n \in \omega} S_n = S \cup \bigcup S \cup \bigcup\bigcup S \cup \bigcup\bigcup\bigcup S \cup \dots$$

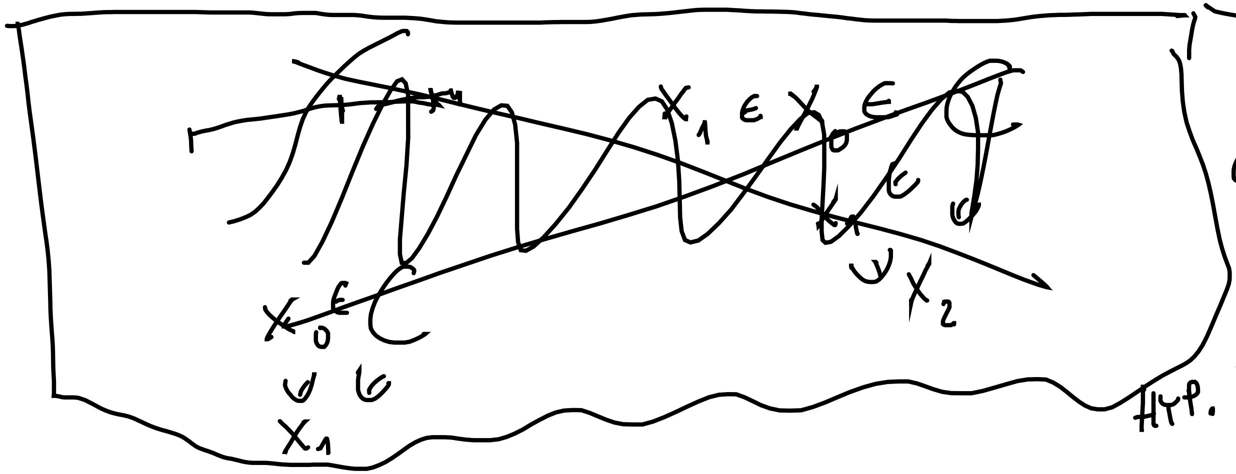
Preverimo: $S \subseteq TC(S)$ ✓

$TC(S)$ tranzitivna?

$$x \in TC(S) = \bigcup_{n \in \omega} S_n \Rightarrow \exists n .\ x \in S_n$$
$$x \subseteq \bigcup S_n = S_{n+1}$$
$$x \subseteq S_{n+1} \subseteq TC(S) \quad \blacksquare$$

$\boxed{\text{TC(S) je najmanjša tranzitivna, ki vsebuje S.}}$

· <u>Lema</u>: Vsak neprazen razred $\mathcal{C}$ ima $\in$-minimalen element: tak $x \in C$, da $x \cap C = \emptyset$.



Ker je $A \neq \emptyset$ obstaja $x \in A$.

$\cancel{\exists x \in A}$. x

Hyp. $\exists x . x \in A$

~~Dokaz: Naj bo $C \neq \emptyset$. Obstaja $S \in C$.~~

$$C \qquad \overset{0}{x_0}, \overset{0}{x_1}, \overset{0}{x_2}, \ldots \overset{0}{x_n} \qquad \overset{1}{42} \quad \overset{1}{42} \quad \overset{1}{42} \quad \overset{1}{42} \quad \ldots$$

$$x : \omega \to V$$
$$n \to V$$

$x_0 \in C$

$\ldots \in x_3 \in x_2 \in x_1 \in x_0$

$TC(x_0)$

- Dokaz: Denimo $C \neq \emptyset$. Tedaj $S \in C$ za neki S.

  Če $S \cap C = \emptyset$, potem vse ok.

  Naj bo $X := TC(S) \cap C$. Torej $X \neq \emptyset$ ker $S \subseteq TC(S)$.

  Po aksiomu o regularnosti obstaja $x \in X$, da $x \cap X = \emptyset$.

  Tedaj je $x \in C$ in $x \cap C = \emptyset$:

  1) $x \in X = TC(S) \cap C \subseteq C$ ✓

  2) $x \cap C = \emptyset$? Denimo, da bi imeli $y \in x \cap C$.

     Ker $y \in x \in TC(S)$, sledi $y \in TC(S)$ zato

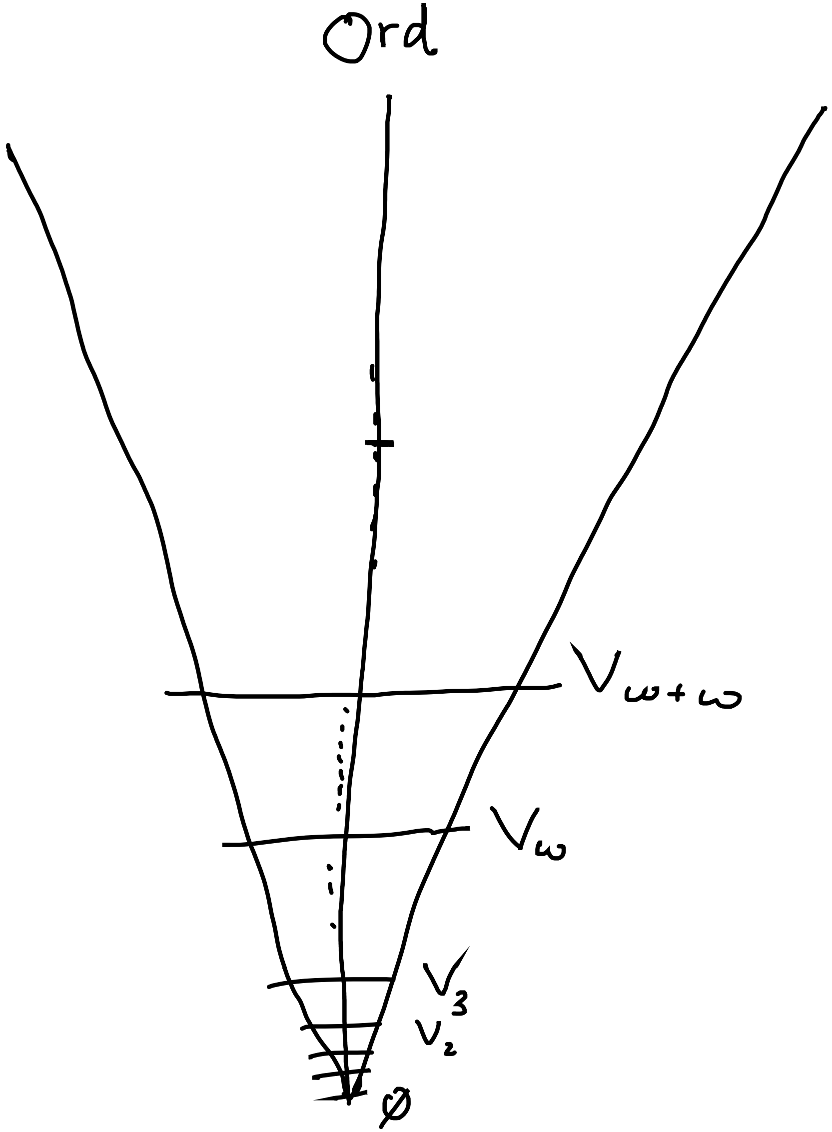
     $$y \in x \cap C \cap TC(S) = x \cap X = \emptyset$$ protislovje.

     Torej $x \cap C = \emptyset$.

$\blacksquare$

Kumulativna hierarhija

Izrek: $V = \bigcup_{\alpha \in Ord} V_\alpha$



Dokaz. Naj bo $W = \bigcup_{\alpha \in \mathrm{Ord}} V_\alpha$. Dokazujemo, da je razred $C := V \setminus W$ prazen. Denimo, da bi $C \neq \emptyset$.

Obstaja $\in$-minimalni $x \in C$, se pravi $x \cap C = \emptyset$.

Za $z \in x$, $z \in W$, torej $x \subseteq W = \bigcup_{\alpha \in \mathrm{Ord}} V_\alpha$.

Po aksiomu o zamenjavi (brez AC!) obstaja $\gamma \in \mathrm{Ord}$, da je

$$x \subseteq \bigcup_{\alpha < \gamma} V_\alpha \subseteq V_\gamma \Rightarrow x \in V_{\gamma+1} \subseteq W$$ protislovje z $x \in V \setminus W$.

Torej $C = \emptyset$.

<u>Definicija</u> $\quad \mathrm{rank}(x) := \min\{\alpha \in \mathrm{Ord} \mid x \in V_\alpha\}$.

$\mathrm{rank}(\emptyset) = 1$

$\mathrm{rank}(\omega) = \omega + 1$