Ultrafiltri

Def: Filter $\mathcal{F}$ na S je <u>ultrafilter</u> če

(4) $\forall A \subseteq S.\ A \in \mathcal{F} \vee S \setminus A \in \mathcal{F}$.

Filter je <u>maksimalen</u>, če je maksimalen glede na $\subseteq$.

Naj bo $P = \{\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(S) \mid \mathcal{F} \text{ je filter}\}$, urejena z $\subseteq$.

Ali ima vsaka veriga v P zgornjo mejo?

Naj bo $C \subseteq P$ veriga. Ali je $\bigcup C$ filter?

(3) $A, B \in \bigcup C \Rightarrow \exists \mathcal{F}, \mathcal{F}' \in C.\ A \in \mathcal{F} \wedge B \in \mathcal{F}'$

Ker C veriga: (i) $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{F}'$: $A \in \mathcal{F}' \Rightarrow A \cap B \in \mathcal{F}' \Rightarrow A \cap B \in \bigcup C$

(ii) $\mathcal{F}' \subseteq \mathcal{F}$: simetrično $\quad A \cap B \in \bigcup C$

(2) $A \in \bigcup C$ in $A \subseteq B \Rightarrow \exists \mathcal{F} \in C.\ A \in \mathcal{F} \underset{\mathcal{F} \text{ filter}}{\Rightarrow} B \in \mathcal{F} \Rightarrow B \in \bigcup C$

(1) $\emptyset \notin \bigcup C$ ✓ $\quad S \in \bigcup C$ AAARGH! Kaj če $C = \emptyset$?!

Ta dokaz deluje za $C \neq \emptyset$. Kaj pa $C = \emptyset$, ali ima zg. mejo?

Maksimalni filtri

Če je $S \neq \emptyset$ tedaj

(1) $C \subseteq P$, C neprazna veriga $\Rightarrow$ $\bigcup C \in P$, zg. meja za C

(2) prazna veriga $\emptyset$ ima zgornjo mejo ker $\{S\} \in P$, zgornja meja.

<u>Lema</u>: Vsak filter je vsebovan v maksimalnem.

Dokaz: Naj bo $\mathcal{F}$ filter na S. Definiramo

$$P = \{ \mathcal{F}' \subseteq \mathcal{P}(S) \mid \mathcal{F} \subseteq \mathcal{F}' \text{ in } \mathcal{F}' \text{ filter} \} \text{ urejen z } \subseteq,$$

Vsaka veriga v P ima zgornjo mejo. Po Zornovi lemi obstaja maksimalni filter v P, ki seveda vsebuje $\mathcal{F}$. $\blacksquare$

Ultrafilter = maksimalni filter

Izrek: Filter je maksimalen $\iff$ je ultrafilter.

Dokaz:

$\boxed{\Leftarrow}$ Denimo $\mathcal{F}$ ultrafilter in $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{F}'$. Dokazujemo $\mathcal{F} = \mathcal{F}'$.

Če bi imeli $A \in \mathcal{F}' \setminus \mathcal{F}$: $A \in \mathcal{F}'$, $A \notin \mathcal{F}$

$\Downarrow$ $\mathcal{F}$ ultrafilter

$S \setminus A \in \mathcal{F}$

$\Downarrow$ $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{F}'$

$S \setminus A \in \mathcal{F}'$

$\emptyset = A \cap (S \setminus A) \in \mathcal{F}'$ protislovje.

· $\boxed{\Rightarrow}$ Dokažimo: če $\mathcal{F}$ ni ultrafilter $\Rightarrow$ $\mathcal{F}$ ni maksimalen.

Naj bo $\mathcal{F}$ filter, ki ni ultrafilter: obstaja $A \subseteq S$, da $A \notin \mathcal{F}$ in $S \setminus A \notin \mathcal{F}$. Iščemo filter $\mathcal{F}'$, ki je večji od $\mathcal{F}$.

Ideja: ker $A \neq \emptyset$ in $A \notin \mathcal{F}$, bi $\mathcal{F}$ "povečali za A".

<u>Lema</u>: Denimo $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{P}(S)$. Če $\mathcal{D}$ zadošča pogoju: $\mathcal{D} \neq \emptyset$ in

$$\forall A, B \in \mathcal{D}.\ A \cap B \neq \emptyset$$

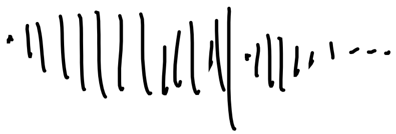
potem je $\mathcal{D}$ vsebovan v nekem filtru na S. Dokaz: vaje

Vzemimo $\mathcal{D} := \mathcal{F} \cup \{A\}$. Preverimo pogoj leme:

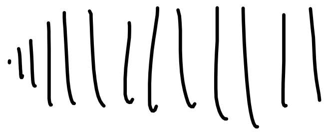
$B \in \mathcal{F} \Rightarrow A \cap B \neq \emptyset$ ker: če bi imeli $A \cap B = \emptyset$, potem $B \subseteq S \setminus A$ torej $S \setminus A \in \mathcal{F}$, protislovje.

Po lemi je $\mathcal{D}$ vsebovan v nekem $\mathcal{F}'$, torej $\mathcal{F} \subsetneq \mathcal{D} \subseteq \mathcal{F}'$. ∎

Ordinalna aritmetika



$(A,<)$



$(B,\prec)$

Vsota $(A,<)+(B,\prec) = (C,\sqsubset)$ vsota dobrih ureditev

$$C = A+B = \{(a,0) \mid a\in A\} \cup \{(b,1) \mid b\in B\}$$

$$(a,0)\sqsubset(a',0) \iff a<a'$$

$$(b,1)\sqsubset(b',1) \iff b\prec b'$$

$$(a,0)\sqsubset(b,1) \iff \text{true}$$

$$(b,1)\sqsubset(a,0) \iff \text{false}$$

Vsota ordinalov: $\underbrace{(\alpha,\in)+(\beta,\in)}_{\in \mathrm{Ord}?}$ za $\alpha,\beta\in\mathrm{Ord}$

Ne, vendar $\cong \gamma\in\mathrm{Ord}$ za enolični γ

Nasledniški in limitni ordinali

Def: Ordinal je <u>nasledniški</u>, če je naslednik:

$$\alpha \text{ naslednik} \iff \exists \beta .\ \alpha = \beta^+ \qquad \beta^+ := \beta \cup \{\beta\}$$

Ordinal je <u>limitni</u>, če je supremum svojih predhodnikov

$$\alpha \text{ limitni} \iff \alpha = \sup\{\beta \mid \beta < \alpha\}$$
$$= \sup\{\beta \mid \beta \in \alpha\}$$
$$= \sup \alpha$$
$$= \bigcup \alpha$$

$\alpha \in \beta \Rightarrow \alpha^+ \in \beta^+$?

$\alpha^+ = \beta^+ \Rightarrow \beta \in \alpha^+$

$\beta \in \alpha$

Izrek: Vsak ordinal je bodisi naslednik bodisi limitni.

Dokaz: Denimo $\alpha \in \mathrm{Ord}$, $\forall \beta \in \mathrm{Ord}$, $\alpha \neq \beta^+$.

Opazimo: $\beta \in \alpha \Rightarrow \beta^+ \in \alpha$. Dokaz: denimo $\beta \in \alpha$. Tedaj $\beta^+ \in \alpha^+ = \alpha \cup \{\alpha\}$.

Ker $\beta^+ \neq \alpha$, je $\beta^+ \in \alpha$.

· Računamo: vemo že $\bigcup\alpha \subseteq \alpha$.

Dokažimo $\alpha \subseteq \bigcup\alpha$:

Vzemimo $\beta \in \alpha \Rightarrow \beta \in \beta^+ \in \alpha \Rightarrow \beta \in \bigcup\alpha$. ∎

Torej α limitni.

$3 = 2^+$ naslednični

ω limitni

0 limitni

Transf. indukcija: $C \subseteq Ord$ podrazred in velja:

1) če $\alpha \in C \Rightarrow \alpha^+ \in C$

2) za β limitni: $(\forall \alpha < \beta . \alpha \in C) \Rightarrow \beta \in C$

Tedaj $C = Ord$, Še enkrat premisli doma.

Transfinitna rekurzija

Običajna: $F : \mathrm{Ord} \to V$ definiramo $F(\alpha) := G(F|_\alpha)$

Lahko: $F : \mathrm{Ord} \to V$

$F(\alpha^+) = G(F(\alpha), \alpha)$

β limitni $F(\beta) = G(F|_\beta)$

$1 + \omega = \sup\{1+n \mid n < \omega\} = \omega$

$\omega + 1 = \omega^+$

$\alpha + 1 = \alpha + 0^+ = (\alpha + 0)^+ = \alpha^+$

Ordinalna aritmetika:

Seštevanje: $\alpha + \beta^+ := (\alpha + \beta)^+$

$\alpha + \beta := \sup\{\alpha + \gamma \mid \gamma < \beta\}$ β limitni $\neq 0$

$\alpha + 0 := \alpha$

Množenje: $\alpha \cdot 0 = 0$

$\alpha \cdot \beta^+ = \alpha \cdot \beta + \alpha$

$\alpha \cdot \beta = \sup\{\alpha \cdot \gamma \mid \gamma < \beta\}$ β limitni