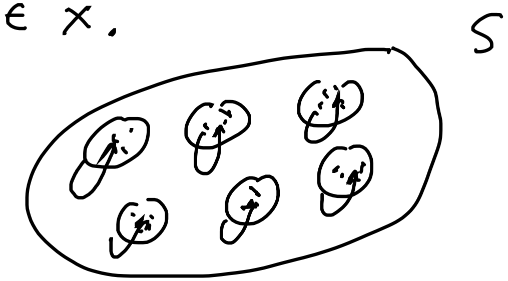
Aksiom izbire

Aksiomi do zdaj ZF. Aksiom izbire C (choice) $\Rightarrow$ Teorija ZFC.

Aksiom izbire (AC):

Družina nepraznih množic ima funkcijo izbire.

$\forall S.\ (\forall x \in S.\ x \neq \emptyset) \Rightarrow \exists f.\ \forall x \in S.\ f(x) \in x.$



Zornova lema

Naj bo $(P, \leq)$ delna ureditev, v kateri ima vsaka veriga zgornjo mejo.
$($ $C \subseteq P$ je <u>veriga</u>, če $\forall x, y \in C \,.\, x \leq y \vee y \leq x$ $)$
Tedaj v P obstaja maksimalen element, tak $x \in P$, da
$\forall y \in P \,.\, x \leq y \Rightarrow x = y$.

<u>Izrek</u>: Vsak vektorski prostor ima bazo.

Dokaz: Naj bo V vektorski prostor.
Definiramo $P := \{ L \subseteq V \mid L \text{ linearno neodvisna} \}$, urejen z $\subseteq$.
Naj bo $C \subseteq P$ veriga. Iščemo zg. mejo za C,
Trdimo: $\bigcup C$ je linearno neodvisna:

$x_1, \ldots, x_n \in \bigcup C$ in $\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_n x_n = 0$.

$x_1 \in L_1 \in C$
$x_2 \in L_2 \in C$ $\Rightarrow \exists L \in C \,.\, x_1, \ldots, x_n \in L \Rightarrow \lambda_1 = \cdots = \lambda_n = 0$.

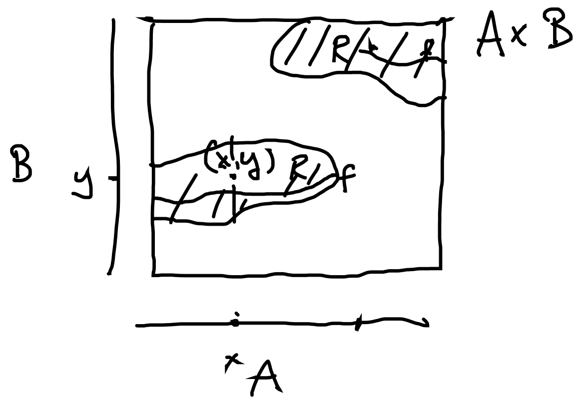
Baze vektorskih prostorov

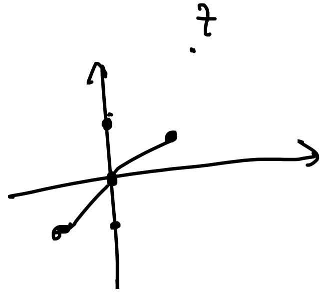
Po Zornu obstaja maksimalni element P, t.j. taka $B \subseteq V$, ki je linearno neodvisna in maksimalna. ∎

AC v ekvivalentni obliki:

Izrek: Aksiom izbire je ekvivalenten (glede na ZF):

$$\forall A, B\ \forall R \subseteq A \times B.\ \big(\forall x \in A\ \exists y \in B.\ (x,y) \in R\big) \Rightarrow \exists f : A \to B.\ \forall x \in A.\ (x, f(x)) \in R.$$



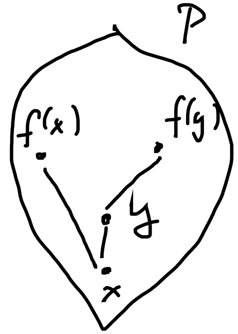


Bourbaki-Wittov izrek

Naj bo $(P, \leq)$ delna ureditev, v kateri ima vsaka veriga supremum.

Naj bo $f : P \to P$ progresivna: $\forall x \in P.\ x \leq f(x)$.

Tedaj f ima negibno točko, $x \in P$ da $f(x) = x$.



Dokaz: S transfinitno rekurzijo definiramo

$$g : \mathrm{Ord} \to P$$

$$g(\alpha) = \sup \{ f(g(\beta)) \mid \beta < \alpha \}$$

Dokažimo, da je $\forall \alpha.\ \{ f(g(\beta)) \mid \beta < \alpha \}$ veriga. ~~Transf. indukcija:~~

Denimo $\beta, \gamma < \alpha$, želimo $f(g(\beta)) \leq f(g(\gamma))$ ali $f(g(\gamma)) \leq f(g(\beta))$.

$\nearrow$ ind. predpostavke, da tak sup imamo.

(1) $\beta = \gamma$ ✓

(2) $\beta < \gamma$: $f(g(\beta)) \leq \sup \{ f(g(\delta)) \mid \delta < \gamma \} = g(\gamma) \leq f(g(\gamma))$

(3) $\gamma < \beta$: simetrično $f(g(\gamma)) \leq f(g(\beta))$.

Bourbaki-Witt

$g(0) = \sup\{f(g(\beta)) \mid \beta < 0\} = \sup\{\} =$ najmanjši element $P = \perp$

$g(1) = \sup\{f(g(0))\} = f(\perp)$

$g(2) = \sup\{f(g(0)), f(g(1))\} = \sup\{f(\perp), f^2(\perp)\} = f(f(\perp))$

$g(3) = \sup\{f(g(0)), f(g(1)), f(g(2))\} = \sup\{f(\perp), f(f(\perp)), f(f(f(\perp)))\} =$

$= f^3(\perp)$

$g(n) = f^n(\perp)$

$\vdots$

$g(\omega) = \sup\{f^n(\perp) \mid n < \omega\} = f^\omega(\perp)$

$g(\omega+1) = f(f^\omega(\perp)) = f^{\omega+1}(\perp)$

$g(\alpha) = f^\alpha(\perp)$.

Bourbaki-Witt

g je monotona: $\alpha \leq \beta \Rightarrow g(\alpha) \leq g(\beta)$:

(1) $\alpha = \beta$ ✓

(2) $\alpha < \beta$: $g(\alpha) \leq f(g(\alpha)) \leq \sup\{f(g(\gamma)) \mid \gamma < \beta\} = g(\beta)$

Toda g ni injektivna $\mathrm{Ord} \to P$, ker Ord ni množica

(če imamo $i : C \to A$ injektivna, C razred, A množica $\Rightarrow$ C množica, ker C je slika funkcije $i^{-1} : \{x \in A \mid \exists y \in C.\, x = i(y)\} \to C$)

Ker g ni injektivna, $\exists \alpha, \beta$, da je $\alpha < \beta$ in $g(\alpha) = g(\beta)$.

Od tod:

$$f(g(\beta)) = f(g(\alpha)) \leq \sup\{f(g(\gamma)) \mid \gamma < \beta\} = g(\beta) \leq f(g(\beta))$$

Imamo $f(g(\beta)) \leq g(\beta) \leq f(g(\beta)) \Rightarrow f(g(\beta)) = g(\beta)$ ∎

Ekvivalenca AC in Zornove leme

<u>Izrek</u> (ZF): AC $\Leftrightarrow$ Zornova lema

Dokaz: $\boxed{\Rightarrow}$ Naj bo $(P, \leq)$ delna in vsaka veriga v P ima zgornjo mejo

$$\forall C \subseteq P \text{ veriga } \exists x \in P.\ \underbrace{C \leq x}_{\forall y \in C.\, y \leq x} \wedge ((\exists x'.\ \underbrace{C < x'}_{\forall y \in C.\, y < x'}) \Rightarrow C < x).$$

Po AC obstaja f, da je $\forall C \subseteq P$ veriga velja

$$C \leq f(C) \wedge ((\exists x'.\, C < x') \Rightarrow C < f(C))$$

Definiramo $Q := \{ C \subseteq P \mid C \text{ veriga v } P \}$ urejena z $\subseteq$.
Trdimo: unija verige verig je veriga. Torej $(Q, \subseteq)$ je delna ur. in vsaka veriga v Q ima sup.

Definiramo $g : Q \to Q$, $g(C) = C \cup \{f(C)\}$ progresivna.

Ekvivalenca AC in Zorna

Po B-W izreku ima g negibno točko $C \in Q$,

$$C = g(C) = C \cup \{f(C)\},$$

Torej $f(C) \in C$. Trdimo $f(C)$ maksimalen:

Denimo $f(C) \leq y$. Če bi imeli $f(C) < y$ potem bi $C \leq f(C) < y$ zato iz def. f sledilo $C < f(C)$, kar ni res, saj je $f(C) \in C$.

Torej $f(C) = y$.

$\boxed{\text{Zorn} \Rightarrow AC}$ Naj bo S, $\forall x \in S .\, x \neq \emptyset$. Iščemo $f : S \to \bigcup S$, da $\forall x \in S .\, f(x) \in x$.

AC in Zornova lema

Definiramo: $g \subseteq S \times \bigcup S$ je <u>delna izbira</u> če

(1) $\forall x \in S\, \forall y, z \in \bigcup S\,.$

$(x,y) \in g \wedge (x,z) \in g \Rightarrow y = z$

(2) $\forall x \in S.\, \forall y \in \bigcup S,\ (x,y) \in g \Rightarrow y \in x.$

$P := \{ g \subseteq S \times \bigcup S \mid g$ je delna izbira$\}$ uredimo z $\subseteq$.

Če je $C \subseteq P$ veriga delnih izbir, potem je $\bigcup C$ delna izbira.

Torej imajo verige v P zg. meje, celo supremume.

Po Zornu obstaja maksimalna izbira f. Trdimo, da je f funkcija izbire, t.j. $\forall x \in S \exists y \in \bigcup S.(x,y) \in f$. Naj bo $x \in S$ in denimo $\neg \exists y \in \bigcup S.\ (x,y) \in f$.

Ker $x \neq \emptyset$, obstaja $z \in x$. Definiramo $f' = f \cup \{(x,z)\}$.

Tedaj je $f' \supsetneq f$ in f' tudi delna izbira, torej f ni maksimalen. Protislovje.