Transfinitna indukcija

<u>Izrek</u>: Naj bo $(W, <)$ dobra ureditev in $S \subseteq W$, za katero velja

$$\forall x \in W .\ (\forall y \in W ,\ y < x \Rightarrow y \in S) \Rightarrow x \in S \qquad (*)$$

Tedaj $S = W$.

Zapišimo $(*)$ drugače: <u>začetni segment</u> $\downarrow x := \{ y \in W \mid y < x \}$, tedaj je $(*)$ ekvivalenten

$$\forall x \in W .\ \downarrow x \subseteq S \Rightarrow x \in S .$$

Dokaz: S protislovjem. Denimo $S \neq W$, torej $W \setminus S \neq \emptyset$. Naj bo $x := \min (W \setminus S)$.
Trdimo $x \in S$ zaradi $(*)$: če je $y \in W$ in $y < x$, potem $y \in S$, saj bi iz $y \notin S$ dobili $x \leq y$. $\blacksquare$

<u>Izrek</u>: Naj bo $C \subseteq \mathrm{Ord}$ in $\forall \alpha \in \mathrm{Ord} .\ \alpha \subseteq C \Rightarrow \alpha \in C$. Tedaj $C = \mathrm{Ord}$.

Dokaz: S protislovjem.
Denimo $C \neq \mathrm{Ord}$, torej $\mathrm{Ord} \setminus C \neq \emptyset$. Tedaj je $\alpha := \bigcap (\mathrm{Ord} \setminus C)$ ordinal in $\alpha \in \mathrm{Ord} \setminus C$. Trdimo $\alpha \in C$, zadostuje preveriti $\alpha \subseteq C$. Naj bo $\beta \in \alpha$, trdimo $\beta \in C$:
če bi $\beta \in \mathrm{Ord} \setminus C$, potem $\alpha \leq \beta$, to je $\alpha = \beta$ ali $\alpha \in \beta$. Torej $\alpha \in \alpha$ ali $\alpha \in \beta \in \alpha$, to ne gre, ker je $\in$ stroga delna. $\blacksquare$

Transfinitna rekurzija

Spomnimo se: rekurzivna definicija $f : \mathbb{N} \to X$

$$f(n) = g([f0, \ldots, f(n-1)]).$$

$$f(0) = g([\,])$$

$$\begin{Bmatrix} x_0 = 15 \\ x_{n+1} = x_n^2 + 7 \end{Bmatrix} \qquad g(l) = \begin{cases} 15 & \text{če } l = [\,] \\ a^2+7 & \text{če } l = [\ldots, a] \end{cases}$$

Vemo, kaj pomeni $f(x)$ za poljubni množici f in x.

Tudi za razred F in množico x, lahko definiramo $F(x)$. (Preveri!)

Naj bo F razred in A množica. Definiramo $F|_A = \{(x,y) \mid y = F(x) \wedge x \in A\}$.

$F|_A$ je množica zaradi aksioma o zamenjavi: $F|_A$ je slika množice A za funkcijo $x \mapsto (x, F(x))$. Tudi $F|_A$ je funkcija z domeno A.

Transfinitna reukrzija - izrek

Naj bo G poljuben razred. Tedaj $\exists!$ razred $F : \mathrm{Ord} \to V$ da za $\forall \alpha \in \mathrm{Ord}$ velja
$$F(\alpha) = G(F|_\alpha).$$

Dokaz:

- obstoj F: trdimo
$$F := \{ (\alpha, y) \mid \alpha \in \mathrm{Ord} \wedge \exists f . (y = G(f|_\alpha) \wedge \forall \beta \in \alpha . f(\beta) = G(f|_\beta)) \}.$$

F funkcijska relacija:

(1) $(\alpha, y) \in F$ in $(\alpha, y') \in F \Rightarrow y = y'$:

$$y = G(f|_\alpha) \quad , \quad y' = G(f'|_\alpha) \quad \text{za neka } f, f'$$

S transf. indukcijo pokažemo $\forall \beta \in \alpha . f(\beta) = f'(\beta)$:

Če $f(\gamma) = f'(\gamma)$ za vse $\gamma < \beta$, tedaj $f(\beta) = G(f|_\beta) = G(f'|_\beta) = f'(\beta)$.

Torej $f|_\alpha = f'|_\alpha$ zato $y = G(f|_\alpha) = G(f'|_\alpha) = y'$.

(2) za vsak α obstaja y, da je $(\alpha, y) \in F$.

- F enoličen