Relacije in dobra urejenost

Relacija $R \subseteq A \times A$ je:

- refleksivna: $\forall x \in A .\ x R x$
- irefleksivna: $\forall x \in A .\ \neg (x R x)$
- tranzitivna: $\forall x, y, z \in A .\ x R y \wedge y R z \Rightarrow x R z$
- simetrična: $\forall x, y \in A .\ x R y \Rightarrow y R x$
- antisimetrična: $\forall x, y \in A .\ x R y \wedge y R x \Rightarrow x = y$

$x R y :\Leftrightarrow (x, y) \in R$

<u>Delna urejenost</u> (A, R) je $R \subseteq A \times A$, ki je: refleksivna,
tranzitivna,
antisimetrična

Uporabimo: $\leq, \sqsubseteq, \subseteq, \preceq$

<u>Stroga delna urejenost</u>: irefleksivna, tranzitivna (oznaka: $<, \sqsubset, \prec$)

<u>Linearna</u>: delna urejenost + $\forall x, y \in A,\ x R y \vee y R x$.

<u>Stroga linearna</u>: stroga delna urejenost + trihotomija:

$$\forall x, y \in A .\ x R y \vee x = y \vee y R x$$

Prehod med urejenostjo in strogo urejenostjo

Izjava: Če je $(P, <)$ stroga delna, potem je $x \leq y \;:\Leftrightarrow\; x = y \vee x < y$ delna urejenost.
Če je $<$ stroga linearna, potem je $\leq$ linearna.

Dokaz: domača naloga.

Izjava: Če je $(P, \leq)$ delna, potem je $x < y \;:\Leftrightarrow\; x \neq y \wedge x \leq y$ stroga delna.
Če je $\leq$ linearna, je $<$ stroga linearna.

Če je $(P, \leq)$ linearna:
$$x < y \;:\Leftrightarrow\; \neg(y \leq x)$$
$$x \leq y \;:\Leftrightarrow\; \neg(y < x)$$

Spodnja meja, infimum, minimum

Naj bo $(P, \leq)$ delna urejenost in $S \subseteq P$:

- $x \in P$ je <u>spodnja meja</u> za S: $\forall y \in S.\ x \leq y$
- $x \in P$ je <u>infimum</u> S (<u>natančna spodnja meja</u>):
  x je spodnja meja S $\wedge$ $\forall y \in P.$ y spodnja meja za S $\Rightarrow y \leq x$.
- $x \in P$ je <u>minimum</u> S če $x \in S$ in x je infimum S.

Simetrično definiramo: zgornja meja, supremum, maksimum.

<u>Def</u>: Naj bosta $(P, <_P)$ in $(Q, <_Q)$ strogi delni urejenosti.
Pravimo, da $f : P \to Q$ <u>ohranja urejenost</u>, če

$$\forall x, y \in P.\ x <_P y \Leftrightarrow f(x) <_Q f(y)$$

Če $<_P$ in $<_Q$ strogo linearni, takemu f-u pravimo <u>naraščajoča</u>.

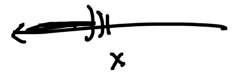
<u>Def</u>: <u>Izomorfizem</u> je naraščajoča bijekcija $f : P \to Q$.

(Tudi $f^{-1} : Q \to P$ je izomorfizem.)

Dobra urejenost

<u>Def</u>: <u>Dobra urejenost</u> je stroga linearna urejenost $(P, <)$, da velja: vsaka neprazna $S \subseteq P$ ima minimum.

<u>Primeri</u>: • $(\mathbb{N}, <)$ je dobra urejenost



- $(\mathbb{Z}, <)$ <u>ni</u> dobra urejenost
- $\{0\} \cup \{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}, n > 0\}$ z relacijo $<$ <u>ni</u> dobra urejenost
- —||— z relacijo $>$ je dobra urejenost

<u>Lema 1</u>: Če je $(W, <)$ in $f : W \to W$ naraščajoča, potem $\forall x \in W.\ x \leq f(x)$.

Dokaz: Denimo $S = \{x \in W \mid f(x) < x\}$ neprazna.

$\neg(x \leq f(x))$
$f(x) < x$
$x > f(x)$

Naj bo $z = \min S$. Torej $f(z) < z$. Ker f naraščajoča, $f(f(z)) < f(z)$.
Torej $f(z) \in S$. To ne gre, ker $f(z) < z$ in $z \leq f(z)$. Protislovje.
Sklep: $S = \emptyset$. $\blacksquare$

Rigidnost dobre urejenosti

<u>Lema 2</u>: Naj bo $(W,<)$ dobra urejenost.

(a) Edini izomorfizem $W \to W$ je identiteta.

(b) Če je $(W,<)$ izomorfen $(W',<')$, potem obstaja natanko en izomorfizem $W \to W'$.

<u>Dokaz</u>:

(a) Denimo $f: W \to W$ izomorfizem. Potem $f^{-1}: W \to W$ izomorfizem.

Tedaj
$$x \leq f(x) \quad \text{po lemi 1}$$
$$x \leq f^{-1}(x) \quad \text{po lemi 1} \Rightarrow f(x) \leq f(f^{-1}(x)) = x$$

$$x \leq f(x) \wedge f(x) \leq x \Rightarrow x = f(x).$$

(b) Recimo $f, g: W \to W'$ izomorfizma. Tedaj $f^{-1} \circ g: W \to W$ izo.

Po (a) sledi
$$f^{-1} \circ g = id_W$$
$$\Rightarrow g = f \circ f^{-1} \circ g = f \circ id_W = f. \qquad \blacksquare$$

Pišemo $(W,<) \cong (W',<')$ če sta W in W' izomorfna.

Ordinalna števila

Ideja: ordinalna števila bi radi definirali tako, da

$$\alpha < \beta \iff \alpha \in \beta \quad \text{in} \quad \alpha = \{\beta \mid \beta < \alpha\}$$

Def.: Množica T je tranzitivna, če $\forall x . (x \in T \Rightarrow x \subseteq T)$.

Ekvivalentno:
- $\bigcup T \subseteq T$
- $T \subseteq \mathcal{P} T$
- $\forall x, y . (x \in y \wedge y \in T \Rightarrow x \in T)$

Primer: $\emptyset$ ✓ $\quad \{\emptyset\}$ ✓ $\quad \{\{\emptyset\}\}$ ✗ $\quad \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$ ✓

Def: Ordinalno število (ordinal) je taka množica, ki je tranzitivna in dobro urejena z relacijo $\in$ ($x < y \overset{!}{\iff} x \in y$).

Primeri

- $\emptyset \in \mathrm{Ord}$
- $\{\emptyset\} \in \mathrm{Ord}$

<u>Def</u>: $\mathrm{Ord} = \{x \mid x \text{ je ordinal}\}$

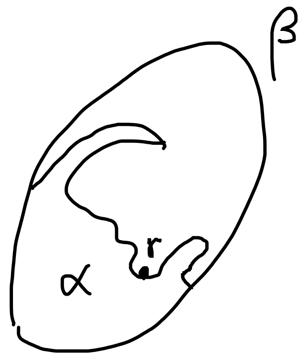
Ordinale označimo z $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \ldots$

<u>Izrek</u>: (a) $\emptyset \in \mathrm{Ord}$

(b) $\alpha \in \mathrm{Ord}$ in $x \in \alpha \Rightarrow x \in \mathrm{Ord}$

(c) $\alpha \in \mathrm{Ord}$ in $\beta \in \mathrm{Ord}$ in $\alpha \subsetneq \beta \Rightarrow \alpha \in \beta$

(d) $\alpha \in \mathrm{Ord}$ in $\beta \in \mathrm{Ord} \Rightarrow \alpha \subseteq \beta$ ali $\beta \subseteq \alpha$.



Dokaz: (a), (b) vaja

(c) Denimo $\alpha, \beta \in \mathrm{Ord}$ in $\alpha \subsetneq \beta$. Trdimo, da je $\alpha = \gamma := \min(\beta \setminus \alpha)$.

- $\xi \in \gamma \Rightarrow \xi \in \alpha$:
  Denimo $\xi \in \gamma$, torej $\xi < \gamma$, zato $\xi \notin \beta \setminus \alpha$, torej $\xi \in \alpha$, saj $\xi \in \beta$ (tranzit. β)
- $\xi \in \alpha \Rightarrow \xi \in \gamma$:
  Denimo $\xi \in \alpha$, torej $\xi \subseteq \alpha$ (tranzitivnost α). Ker $\gamma \notin \alpha$, tudi $\gamma \notin \xi$.
  Zaradi linearnosti $\in$ na β, sledi $\xi \in \gamma$ ali $\xi = \gamma$. Trdimo $\xi \neq \gamma$:
  če $\xi = \gamma$ dobimo: $\gamma \in \alpha$, to ne gre.

krneki

(d) Imamo $\alpha, \beta \in \mathrm{Ord}$.

Naj bo $\gamma := \alpha \cap \beta$. Tedaj je γ ordinal (dokaz doma).

- če $\gamma = \alpha$, potem $\alpha \subseteq \beta$
- če $\gamma = \beta$, potem $\beta \subseteq \alpha$
- če $\gamma \neq \alpha$ in $\gamma \neq \beta$, potem $\gamma \subsetneq \alpha$ in $\gamma \subsetneq \beta$.

  Iz (c) sledi $\gamma \in \alpha$ in $\gamma \in \beta$. Torej $\gamma \in \alpha \cap \beta = \gamma$, se pravi $\gamma < \gamma$, kar ni možno saj je $<_{\in}$ irefleksivna na α.

Osnovne lastnosti Ord

$\mathrm{Ord} := \{ x \mid x \text{ je ordinal} \}$

Izrek: (a) Ord je strogo linearno urejen z relacijo $\in$:

$\forall \alpha, \beta \in \mathrm{Ord}.\ \alpha \in \beta \vee \alpha = \beta \vee \beta \in \alpha$ (trihotomija)

$\forall \alpha \in \mathrm{Ord}.\ \alpha \notin \alpha$ (irefleksivnost)

$\forall \alpha, \beta, \gamma \in \mathrm{Ord}.\ \alpha \in \beta \text{ in } \beta \in \gamma \Rightarrow \alpha \in \gamma$ (tranzitivnost)

(b) Za vsak $\alpha \in \mathrm{Ord}$ velja $\alpha = \{ \beta \in \mathrm{Ord} \mid \beta \in \alpha \}$

(c) Če je $S \subseteq \mathrm{Ord}$ množica, potem je $\bigcup S$ ordinal in $\sup S = \bigcup S$ (glede na lin. urej. Ord)

(d) Če je $S \subseteq \mathrm{Ord}$ neprazen podrazred, potem je $\bigcap S$ ordinal in $\inf S = \bigcap S$,

(e) $\alpha \in \mathrm{Ord} \Rightarrow \alpha \cup \{\alpha\} \in \mathrm{Ord}$.

Dokaz: vaje in domača naloga.