Aksiomi

Jezik teorije množic: relacija $\in$

1. Ekstenzionalnost: $\forall x, y. (x = y \Leftrightarrow \forall z. z \in x \Leftrightarrow z \in y)$

$\emptyset$

2. Prazna množica: $\exists x \forall y. y \notin x$

$a \notin b :\Leftrightarrow \neg(a \in b)$

3. Neurejeni par: $\forall x, y \exists z. \forall w. (w \in z \Leftrightarrow w = x \lor w = y)$

$\{x, y\}$

$\{x\} := \{x, x\}$

4. Unija: $\forall x \exists y \forall z. (z \in y \Leftrightarrow \exists w. w \in x \land z \in w)$

$\bigcup x$

$\bigcup \emptyset = \emptyset \qquad \bigcup \{\emptyset\} = \emptyset$

$a \cup b := \bigcup \{a, b\}$

Presek?

Okrajšava: $x \subseteq y :\Leftrightarrow \forall z. z \in x \Rightarrow z \in y$

Aksiom o potenčni množici

5. Potenčna množica: $\forall x \exists y \forall z . (z \in y \Leftrightarrow z \subseteq x)$ $\mathcal{P}x$ okrajšava

$z \in \mathcal{P}x \Leftrightarrow z \subseteq x$

6. Podmnožica: Naj bo $\varphi(x)$ formula, v kateri se y, z ne pojavita

$$\forall z \exists y \forall w (w \in y \Leftrightarrow w \in z \wedge \varphi(w))$$

aksiomska <u>shema</u>: vsaka formula φ nam da aksiom

Oznaka: $\{x \in z \mid \varphi(x)\}$

$w \in \{x \in z \mid \varphi(x)\} \Leftrightarrow w \in z \wedge \varphi(w)$

Običajno: $\{ \cancel{x^2+3 \mid x \in \mathbb{R}} \wedge x > 0\}$ $\{x \mid \varphi(x)\}$?

Rusellov paradoks

$(A \Rightarrow \neg A) \Rightarrow \neg A$

$\bot \Rightarrow \neg\bot$

<u>Izrek</u>: $\neg \exists v\, \forall x .\, x \in v$.

Dokaz: Denimo, da obstaja tak v. Naj bo

$$r := \{ x \in v \mid x \notin x \}.$$

Ali je $r \in r$?

Če $r \in r$, potem $r \in v \land r \notin r$. Torej $r \notin r$.

Ker $r \notin r$ in ker $r \in v$, velja $r \in \{x \in v \mid x \notin x\} = r$.

Torej $r \in r$. To ne gre! $\blacksquare$

Razredi

Za formulo $\varphi(x)$ je $\{x \mid \varphi(x)\}$ razred vseh množic x, ki zadoščajo pogoju $\varphi(x)$. Če je $C \equiv \{x \mid \varphi(x)\}$, smemo pisati

$$y \in C$$

in to je okrajšava za $\varphi(y)$: $\quad y \in \{x \mid \varphi(x)\} \iff \varphi(y)$

Prepovedano je pisati $C \in \cdots$

Primeri: $\quad V = \{x \mid \top\} = \{x \mid x = x\}$

$[\, C = D \iff \forall x,\ x \in C \Leftrightarrow x \in D \,]$

$[\, C \subseteq D \iff \forall x.\ x \in C \Rightarrow x \in D \,]$

$[\, \mathcal{P}C := \{x \mid x \subseteq C\} = \{x \mid \{y \mid y \in x\} \subseteq C\} \,]$

Vsaka množica x določa razred $\{y \mid y \in x\}$

Razred C je množica, če obstaja x, da je $C = \{y \mid y \in x\}$.

Pravi razred je tak razred, ki ni množica.

V je pravi razred. Russellov razred $R := \{x \mid x \notin x\}$ je pravi.

Zapis podmnožice in razreda

$\{x \in y \mid \varphi(x)\}$ podmnožica

$\{x \mid \varphi(x)\}$ razred

Katere množice obstajajo?

$\emptyset$, $\{\emptyset\}$, $\{\emptyset, \{\emptyset\}\}$, $\{\{\emptyset\}\}$, $\mathcal{P}(\{\emptyset, \{\emptyset\}\})$ .....

hereditarno končne

Presek: $\bigcap x := \{y \mid \forall z . (z \in x \Rightarrow y \in z)\} = \{y \mid \forall z \in x . y \in z\}$

Okrajšava: $\forall a \in b . \varphi(a) :\Leftrightarrow \forall a . a \in b \Rightarrow \varphi(a)$

$\exists a \in b . \varphi(a) :\Leftrightarrow \exists a . a \in b \wedge \varphi(a)$

$\bigcap \emptyset = \{y \mid \forall z \in \emptyset . y \in z\} = V$

Če $x \neq \emptyset$, $\bigcap x = \{y \in \bigcup x \mid \forall z \in x . y \in z\}$.

Neskončne množice

7. Neskončna množica:

$$\exists x.\ \emptyset \in x \wedge \forall y \in x.\ y \cup \{y\} \in x.$$

Kaj tak x vsebuje?

$\emptyset$, $\emptyset \cup \{\emptyset\} = \{\emptyset\}$,

$\{\emptyset\} \cup \{\{\emptyset\}\} = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$,

$\{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$

$\{a, b, c\}$

Oznake

$0 := \emptyset$

$1 := \{\emptyset\} = \{0\}$

$2 := \{0, 1\}$

$3 := \{0, 1, 2\}$

$4 := \{0, 1, 2, 3\}$

$0 \in x$

$1 \in x$

$2 \in x$

$3 \in x$

$\vdots$

Množica omega

$\mathrm{Ind} := \{ x \mid \emptyset \in x \wedge \forall y \in x.\ y \cup \{y\} \in x \}$ induktivne množice

Ideja: ω je najmanjša induktivna množica.

$\omega := \bigcap \mathrm{Ind}$? Kaj pomeni $\bigcap C$, C razred?

Presek razreda: $\bigcap C = \{ x \mid \forall y \in C.\ x \in y \}$

$\bigcap \emptyset = \bigcap \{x \mid x \in \emptyset\} = \{ x \mid \forall y \in \emptyset.\ x \in y \} = V$

Če $c \in C$, potem $\bigcap C$ je množica, ker $\bigcap C = \{ x \in c \mid \forall y \in C.\ x \in y \}$

ω je množica, ker je Ind neprazen po aksiomu o neskončni množici.

Ali je $\omega \in \mathrm{Ind}$?

$\emptyset \in \omega$? ✓

$y \in \omega \Rightarrow y \cup \{y\} \in \omega$? ✓

<u>Naslednik</u> množice x je

$x^+ := x \cup \{x\}$.

$0 := \emptyset$

$1 := 0^+$

$2 := 1^+ \ldots$

Kodiranje

Relacije:

$(1,0) := \{\{0,1\},\{1,0\}\}$

$\{\{0,1\}\}$

$(0,0) = \{\{0\},\{0,1\}\}$

$(1,1) = \{\{0,1\},\{1\}\}$

- urejeni par $(x,y) := \cancel{\{\{\emptyset, x\}, \{1, y\}\}}$ OK?

$$\boxed{(x,y) := \{\{x\},\{x,y\}\}}$$

$$(x,x) := \{\{x\},\{x\}\} = \{\{x\}\}$$

$$(x,y) = (a,b) \Rightarrow x = a \land y = b \ ?$$

Relacija R na A in B je $R \subseteq A \times B$.

Kaj pa je $A \times B$?

Naivno: $A \times B = \{(x,y) \mid x \in A \land y \in B\}$

$= \{z \mid \exists x \in A\, \exists y \in B.\, z = (x,y)\}$

Funkcija $f : A \to B$ je $f \subseteq A \times B$, ki je funkcijska:

$$\forall x \in A\, \exists! y \in B.\, (x,y) \in f.$$

Aplikacija f(x)

$\theta(x_1, \dots, x_n)$ $\qquad$ $\forall x_1 \dots x_n \exists! y.\ \varphi(x_1 \dots x_n, y)$

$\cancel{f(x)}$

$\mathrm{app}(f, x)$ $\qquad$ $\forall f, x \exists! y.$ " "

$\forall f.\ f$ je funkcijska A in $B \Rightarrow \forall x \in A\ \exists! y \in B.\ (x, y) \in f.$

$$f[x] := \{ y \mid \exists z \in x. (z, y) \in f \}$$

"slika množice x glede na f"

Vaja: $f[x]$ je množica.

Naivno: $f[\{a, b, c\}] = \{ f(a), f(b), f(c) \}$

$\iota(x)$ = "edini element x"

$$\cancel{\forall x \exists! y.\ (x = \emptyset \wedge y = \emptyset) \vee (y \in x \wedge \forall z \in x.\ y = z)}$$

NAROBE!

$$f(x) := \iota(f[\{x\}])$$

O vpeljavi operacij

Želimo operacijo $f(x_1, \dots, x_n)$ $\qquad \vec{x} = x_1, \dots, x_n$
s pomočjo $\varphi(\vec{x}, y)$, vendar $\exists! y.\, \varphi(\vec{x}, y)$ ne velja za vse $\vec{x}$.

Ideja: popravimo φ, takole:

$$\psi(\vec{x}, y) :\Longleftrightarrow \left(\left(\exists! z.\, \varphi(\vec{x}, z) \right) \wedge \varphi(\vec{x}, y) \right) \vee$$
$$\left(\neg \left(\exists! z.\, \varphi(\vec{x}, z) \right) \wedge y = \emptyset \right).$$

Sedaj velja

$$\forall \vec{x}\, \exists! y.\, \psi(\vec{x}, y)$$

Torej smemo vpeljati operacijo $f(\vec{x})$ in velja $\forall \vec{x}.\, \psi(\vec{x}, f(\vec{x}))$.
Za tiste $\vec{x}$, pri katerih $\exists! y.\, \varphi(\vec{x}, y)$, imamo $\varphi(\vec{x}, f(\vec{x}))$,
sicer $f(\vec{x}) = \emptyset$.

Primer: $\varphi(x, y) :\Longleftrightarrow x = \{y\}$ ..... $f(x) = \begin{cases} y & \text{če je } x \text{ oblike } \{y\} \\ \emptyset & \text{sicer} \end{cases}$

$\varphi(f, x, y) :\Longleftrightarrow (x, y) \in f$ ..... operacija aplikacija $\mathrm{app}(f, x)$
pišemo $f(x)$.

Aksiom o regularnosti

Ali obstaja množica x, da je $x \in x$?

8. Regularnost:

$$\forall x .\ x = \emptyset \lor \exists y \in x .\ y \cap x = \emptyset .$$

Izrek: $\neg \exists x .\ x \in x$.

Dokaz. Denimo, da je x tak, da $x \in x$.

Obravnavajmo $z = \{x\}$. Po regularnosti z vsebuje y, da $z \cap y = \emptyset$.

Edini $y \in z$ je $y = x$. Torej $z \cap x = \emptyset$, kar ni res, saj

$x \in z$ in

$x \in x$ torej $x \in z \cap x$. $\blacksquare$

Vaja: Dokaži, da ne obstajajo $x_1, \ldots, x_n$, da velja

$$x_1 \in x_2 \in x_3 \in \cdots \in x_n \in x_1$$

($\in$ nima ciklov) Kaj pa $\ldots \in x_5 \in x_4 \in x_3 \in x_2 \in x_1$?

Aksiom o zamenjavi

Naj bo $\varphi(x,y)$ formula, v kateri se ne pojavita a in b.

9. Zamenjava:

$$\forall a. \underbrace{(\forall x \in a. \exists! y. \varphi(x,y))}_{} \Rightarrow \exists b. \forall x \in a. \exists y \in b. \varphi(x,y).$$

φ določa "funkcijo", ki vsakemu $x \in a$ priredi y, da $\varphi(x,y)$.

Tvorimo "sliko a glede φ":

$$\{ y \mid \exists x \in a. \varphi(x,y) \}$$

Ali je slika množice množica?

Zamenjava: slika množice glede na funkcijsko relacijo je.

Velike množice

$\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}, \ldots, \omega, \mathcal{P}\omega, \mathcal{P}(\mathcal{P}\omega), \mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{P}\omega)), \ldots :$

$\mathcal{P}\omega \cup \mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{P}\omega))), \ldots$

Ali lahko tvorimo unijo

$\omega, \mathcal{P}\omega, \mathcal{P}^2\omega, \mathcal{P}^3\omega, \ldots$?

$$\mathcal{P}^n\omega = \underbrace{\mathcal{P}(\mathcal{P}(\cdots}_{n} \mathcal{P}\omega)\cdots))$$

Da, če znamo tvoriti množico

$S = $ "$\{\omega, \mathcal{P}\omega, \mathcal{P}^2\omega, \mathcal{P}^3\omega, \ldots\}$"

S kot slika ω:

$0 \mapsto \omega$
$1 \mapsto \mathcal{P}\omega$
$2 \mapsto \mathcal{P}^2\omega$
$3 \mapsto \mathcal{P}^3\omega$
$\vdots \quad \vdots$

Formula φ, ki predstavlja tako funkcijo

Poskus:

$\varphi(x,y) :\Longleftrightarrow (x = \emptyset \wedge y = \omega) \vee$

$\exists z, t.\ x = z \cup \{z\} \wedge \varphi(z,t) \wedge y = \mathcal{P}t$

?! To ni definicija φ ?!

Rekurzija / indukcija na ω .....