Izrek (Cantor): $|A| < |\mathcal{P}(A)|$

Dokaz: Dokazujemo (1) $|A| \leq |\mathcal{P}(A)|$
(2) $|A| \neq |\mathcal{P}(A)|$

Dokaz (1): iščemo injektivno $f: A \to \mathcal{P}(A)$.
Vzemimo $f(x) = \{x\}$.
Injektivna? Naj bosta $x, y \in A$ in $\{x\} = \{y\}$.
$x \in \{x\} = \{y\} \Rightarrow x = y$ ✓

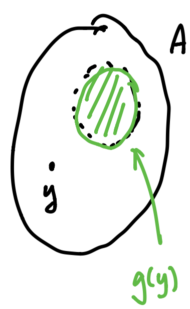
Dokaz (2): dokazujemo $\neg \exists g: A \to \mathcal{P}(A).\ g$ je bijektivna $\Updownarrow$
$\forall g: A \to \mathcal{P}(A).\ \underbrace{\neg(g \text{ je bijektivna})}$

g ni injektivna ali
g ni surjektivna

$\Rightarrow$ Zadostuje pokazati $\forall g: A \to \mathcal{P}A.\ g$ ni surjektivna

Naj bo $g: A \to \mathcal{P}A$. Dokazujemo: $\neg \forall S \in \mathcal{P}A.\ \exists x \in A.\ g(x) = S$.
$\exists S \in \mathcal{P}A.\ \forall x \in A.\ g(x) \neq S$.

Vzemimo $S = \{y \in A \mid y \notin g(y)\}$.



Preverimo: $\forall x \in A.\ g(x) \neq S$.
Naj bo $x \in A$. Denimo, da bi veljalo $g(x) = S$.

- $x \in S$? Če je $x \in S$, potem
  $x \in \{y \in A \mid y \notin g(y)\} \Rightarrow$
  $x \notin g(x) = S \Rightarrow x \notin S$

Dokazali: $x \in S \Rightarrow x \notin S$

- Če $x \notin S = g(x)$, potem $x \in S$ po definiciji S.

Imamo: $\left.\begin{array}{l} x \in S \Rightarrow x \notin S \\ x \notin S \Rightarrow x \in S \end{array}\right\}$ $x \in S \Leftrightarrow x \notin S$ neresnica

$\perp$

■

Množice in razredi

Definirajmo množico

$$R = \{ S \mid S \notin S \}$$

Ali je $R \in R$?

(1) Če $R \in R$, potem $R \notin R$ po definiciji R

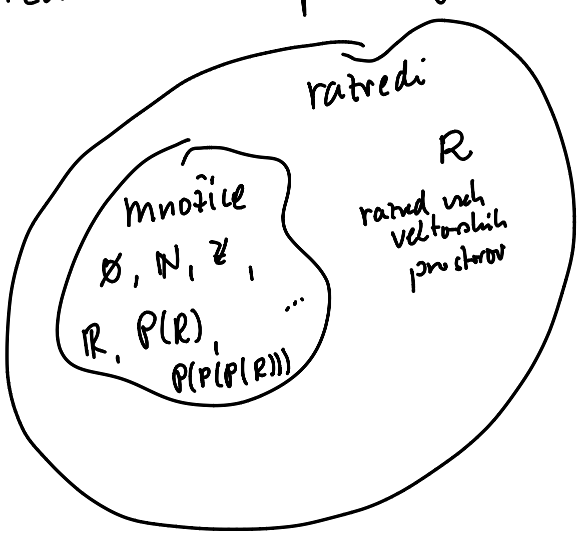
(2) Če $R \notin R$, potem $R \in R$ po definiciji R

Dokazali smo: $R \in R \Leftrightarrow R \notin R$, to je $\perp$.

Russellov paradoks.

Množica = skupek objektov

Razred = skupek objektov, ki ni element razreda



Primeri pravih razredov (taki, ki niso množice):

- razred vseh množic:

$$V = \{ \underset{\substack{\uparrow \\ \text{množica}}}{S} \mid \underset{\substack{\nwarrow \\ \text{resnica}}}{T} \}$$

Če bi bila V množica, bi definirali njeno podmnožico

$$R = \{ S \in V \mid S \notin S \} \quad \text{(po aksiomu o podmnožici)}$$

in dobili Russellov paradoks.

Kako se z razredi izognemo Russellovemu paradoksu?

~~Poskus~~: Naj bo R razred vseh razredov, ki ne vsebujejo samih sebe:

$$R = \{ \underset{\substack{\uparrow \\ \text{razredi}}}{C} \mid C \notin C \}$$

To ni definicija razreda, ker razredi niso elementi razredov.

Poskus: ~~množica~~ razred $R = \{ \underset{\substack{\uparrow \\ \text{množica}}}{S} \mid S \notin S \}$

Razred definiramo takole $\{ \underset{\substack{\uparrow \\ \text{množica}}}{S} \mid \varphi(S) \}$

C razred $\qquad C \subseteq T$

T razred $\qquad \forall S$ množica. $S \in C \Rightarrow S \in T$

$$\text{množica} \longrightarrow x \in y \longleftarrow \text{razred}$$

Primeri pravih razredov:

- Razred vseh vektorskih prostorov
- Razred vseh grup
- Razred vseh enojcev: $E = \{ S \mid \exists! x \in S . \top \}$
- Razred vseh kardinalnih števil

Aksiomi ZFC

Zermelo - Fraenkel

Choice

Geometrija:
točke, premice

Objekti teorije: množice
Relacija: $\in$ (s pomočjo $\in$ definiramo operacije $\cup, \cap, \ldots, \emptyset$)

Aksiomi:

1. Ekstenzionalnost:

$$\forall A, B . (A = B \iff \forall x . \; x \in A \iff x \in B)$$

2. Prazna množica:

$$\exists A . \forall x . \neg (x \in A)$$

3. Dvojec:

$$\forall x, y. \exists z. \forall u. (u \in z \Leftrightarrow u = x \lor u = y)$$

$\{x, y\}$ je tisti edini z, ki zadošča

$$\forall u. u \in \{x, y\} \Leftrightarrow u = x \lor u = y$$

$\{x\} = \{x, x\}$

4. Unija:

osnovni: $\forall S. \exists U. \forall x. (x \in U \Leftrightarrow \exists A \in S. x \in A)$

z operacijo unija:

$$\forall x. \quad x \in \bigcup_{A \in S} A \Leftrightarrow \exists A \in S. x \in A$$

5. Potenčna množica:

okrajšava: $X \subseteq Y \Leftrightarrow \forall z. z \in X \Rightarrow z \in Y$

osnovni način:

$$\forall A. \exists P. \forall S. (S \in P \Leftrightarrow S \subseteq A)$$

z operacijo: $S \in \mathcal{P}(A) \Leftrightarrow S \subseteq A$

6. Podmnožica:

Naj bo $\varphi(x)$ poljubna logična formula. Tedaj:

$$\forall A. \exists P. \forall x. (x \in P \Leftrightarrow x \in A \land \varphi(x))$$

$$\forall y. \quad y \in \{x \in A \mid \varphi(x)\} \Leftrightarrow y \in A \land \varphi(y)$$

Presek je podmnožica unije in ga dobimo iz aksiomov o uniji in podmnožici (premisli!)

7. Neskončnost:

$$\exists \omega .\ \emptyset \in \omega \wedge \forall x \in \omega .\ x \cup \{x\} \in \omega .$$

Kaj je v ω?

$\emptyset$,

$\emptyset \cup \{\emptyset\} = \{\emptyset\}$

$\{\emptyset\} \cup \{\{\emptyset\}\} = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$

$\{\emptyset, \{\emptyset\}\} \cup \{\{\emptyset, \{\emptyset\}\}\} = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$

$\vdots$

8. Dobra osnovanost. (poglej v knjigo ali Wikipedijo)

poanta: ali obstaja S, da je

$$S = \{S\}$$

$\dots \in S \in S \in S \in S \in S \in S$

TO SE NE ZGODI.

9. Fraenkelov aksiom: (poglej v knjigo ali Wikipedijo)

poanta: zeeeelo velike množice

ω, $\mathcal{P}(\omega)$, $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\omega))$, $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{P}(\omega)))$, ...

$\uparrow$
naravna števila

Ali obstaja množica, ki vsebuje vse te?

$\{ \overset{0}{\omega}, \overset{1}{\mathcal{P}(\omega)}, \overset{2}{\mathcal{P}(\mathcal{P}(\omega))}, \mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{P}(\omega))), \ldots \}$?

10. Aksiom izbire

Zapiši: AC $\Leftrightarrow$ Zornova lema

Ideja: Vse matematične objekte kodiramo z množicami.

Števila: $\mathbb{N}$

$$
\begin{aligned}
0 &= \emptyset \\
1 &= \{0\} = \{\emptyset\} \\
2 &= \{0,1\} = \{\emptyset, \{\emptyset\}\} \\
3 &= \{0,1,2\} = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\} \\
&\vdots \\
n &= \{0, 1, \ldots, n-1\}
\end{aligned}
$$

Urejeni par: $(x,y) = \{\{x\}, \{x,y\}\}$

$$\{\{3\}, \{3,1\}\} = (3,1)$$
$$\{\{3\}, \{1,3\}\} = (3,1)$$

$\{\{3\},\{3\}\} =$ $(3,3)$

$\{\{3\},\{3,3\}\}$