

DRUŽINE MNOŽIC

Def: Družina množic $(A_i)_{i \in I}$ je preslikava, ki vsakemu indeksu $i \in I$ iz indeksne množice I priredi množico A_i .

Primeri:

$$(1) \quad I = \{0, 1, 2\} \quad \begin{aligned} A_0 &= \{5, 6, 7\} \\ A_1 &= \{10\} \\ A_2 &= \{5, 6, 7\} \end{aligned}$$

(2) Družina vseh zaprtih intervalov:

$$I = \{(a, b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid a \leq b\} \quad \text{indeksi so krajišča intervalov}$$

$$A_{(a,b)} = [a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$$

(3) Prazna družina

$$I = \emptyset$$

(5) Neprazna družina

$$I \neq \emptyset$$

(4) Družina praznih množic

I poljuben

$$A_i = \emptyset \text{ za vse } i \in I$$

(6) Družina nepraznih množic

I poljuben

$$A_i \neq \emptyset \text{ za vse } i \in I$$

Def: Naj bo $(A_i)_{i \in I}$ družina. Funkcija izbire je taka

$$f: I \rightarrow \bigcup_{i \in I} A_i,$$

da velja $f(i) \in A_i$ za vse $i \in I$.

Primer
(1)

$$I = \{0, 1, 2\}$$

$$A_0 = \{5, 6, 7\}$$

$$A_1 = \{10\}$$

$$A_2 = \{5, 6, 7\}$$

Funkcija izbire: $f: \{0, 1, 2\} \rightarrow \{5, 6, 7, 10\}$

$$f(0) = 5 \in A_0$$

$$f(1) = 10 \in A_1$$

$$f(2) = 6 \in A_2$$

$$(2) \quad I = \{(a, b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid a \leq b\}$$

$$A_{(a,b)} = [a, b]$$

$$f: I \rightarrow \mathbb{R}$$

$$f(a, b) = \frac{a+b}{2}$$

ali $f(a, b) = a$

$$(3) \quad I = \emptyset \quad (A_i)_{i \in \emptyset}$$

$$f: \emptyset \rightarrow \bigcup_{i \in \emptyset} A_i = \emptyset \quad f \subseteq \emptyset \times \emptyset = \emptyset$$

$$f = \emptyset: \emptyset \rightarrow \emptyset \quad \text{ali izbira? } \forall i \in \emptyset, f(i) \in A_i \quad \checkmark$$

$$(4) \quad I = \{0, 1, 2\}$$

$$A_0 = \{5, 6, 7\}$$

$$A_1 = \{1, 2, 3\}$$

$$A_2 = \emptyset$$

$$f: \{0, 1, 2\} \rightarrow \{1, 2, 3, 5, 6, 7\}$$

$$f(0) = 6$$

$$f(1) = 1 \quad \text{NI IZBIRE}$$

$$f(2) = ? \quad \swarrow$$

(5) I

$A_i \neq \emptyset$ za vse $i \in I$.

Aksiom izbire: Družina nepraznih množic ima
(AC) funkcijo izbire.

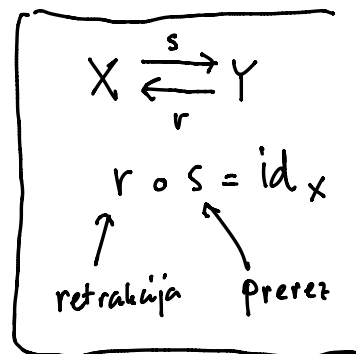
AC je ekvivalenten:

- Vsak vektorski prostor ima bazo (Zornova lema)
- Izrek Banach-Tarski (posledica AC):



Izrek: Vsaka surjekcija ima prerez.

Kaj pravi? Če $f: A \twoheadrightarrow B$ surjektivna
potem $\exists s: B \rightarrow A$, $f \circ s = \text{id}_B$.

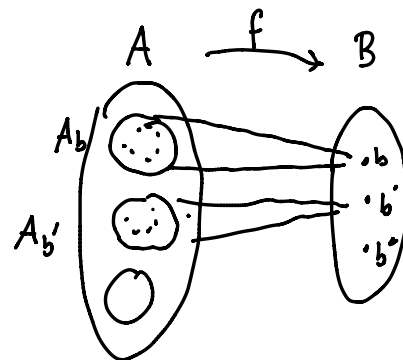


Formula:

$$\forall A, B \forall f: A \rightarrow B. f \text{ surj} \Rightarrow \exists s: B \rightarrow A. f \circ s = \text{id}_B.$$

Dokaz. Definiramo družino

indeksna množica B
 za $b \in B$ je množica $A_b = f^{-1}(\{b\})$
 $(A_b)_{b \in B}$ je družina nepraznih množic.
 (zakaj?)



Po AC obstaja izbira

$$s: B \rightarrow \bigcup_{b \in B} A_b = A \quad \swarrow \text{zakaj?}$$

in očitno (zakaj?) velja $f \circ s = \text{id}_B$. ■

Koprodukt ali (disjunktna) vsota družine $(A_i)_{i \in I}$:

$$\bigsqcup_{i \in I} A_i \quad \text{ali} \quad \sum_{i \in I} A_i$$

$$\bigsqcup_{i \in I} A_i = \{(i, x) \mid i \in I, x \in A_i\}$$

Produkt družine $(A_i)_{i \in I}$:

$$\prod_{i \in I} A_i = \left\{ f: I \rightarrow \bigcup_{i \in I} A_i \mid \forall i \in I. f(i) \in A_i \right\}$$

funkcije izbire za družino $(A_i)_{i \in I}$

Primeri:

(1) Koprodukt dveh množic $X + Y$:

$$I = \{0, 1\} \quad A_0 = X$$

$$A_1 = Y$$

$$\begin{aligned} \bigsqcup_{i \in I} A_i &= \{ (i, x) \mid i \in \{0, 1\}, x \in A_i \} = \\ &= \{ (0, x) \mid x \in A_0 \} \cup \{ (1, x) \mid x \in A_1 \} = \\ &= \{ (0, x) \mid x \in X \} \cup \{ (1, x) \mid x \in Y \} = \\ &\quad X + Y \end{aligned}$$

$$(2) \quad \bigsqcup_{i \in \emptyset} A_i = \emptyset \quad (\text{zakaj?})$$

$$\bigsqcup_{i \in I} A_i = \emptyset \quad \text{če} \quad A_i = \emptyset \quad \text{za vse } i \in I.$$

(3) Množici X in Y , $X \times Y$ kot poseben primer koprodukta:

indeksna množica X

družina $A_x = Y$ za $x \in X$

$(A_x)_{x \in X}$

$$\begin{aligned} \bigsqcup_{x \in X} A_x &= \{ (x, y) \mid x \in X, y \in A_x \} = \\ &= \{ (x, y) \mid x \in X, y \in Y \} = X \times Y \end{aligned}$$

(4) Množici X in Y , Y^X poseben primer produkta:

Družina kot v (3):

indeksna X

$$A_x = Y$$

funkcija izbire: $f: X \rightarrow \bigcup_{x \in X} A_x = \bigcup_{x \in X} Y = Y$ če $X \neq \emptyset$

da $\forall x \in X. f(x) \in A_x$

$\Leftrightarrow \forall x \in X. f(x) \in Y$

$\Leftrightarrow \top$

Torej: vse $f: X \rightarrow Y$ so funkcije izbire

$$\prod_{x \in X} A_x = \{f: X \rightarrow Y \mid \top\} = Y^X$$

Če je $X = \emptyset$? Premisi doma.

Opomba:

AC $\Leftrightarrow$ produkt družine nepraznih množic
je neprazen.

(zakaj?)

Moč množic

Def: Množica A ima moč manjšo ali enako moči množice B ,
če obstaja injektivna $A \rightarrow B$, pišemo $|A| \leq |B|$:

$$|A| \leq |B| \Leftrightarrow \exists f: A \rightarrow B. f \text{ injektivna.}$$

Def: Moči A in B sta enaki, pišemo $|A| = |B|$, če
obstaja bijektivna $A \rightarrow B$,

Def: $|A| < |B| \Leftrightarrow |A| \leq |B|$ in $|A| \neq |B|$.

Primeri: (1) Končne množice: množice $|A|$ je naravno število in primerjamo naravna števila.

$$(2) \quad S = \{2n \mid n \in \mathbb{N}\} = \{0, 2, 4, 6, 8, \dots\}$$

$$|S| \leq |\mathbb{N}| \quad \text{ker injektivna } 2n \mapsto 2n$$

$$|\mathbb{N}| \leq |S| \quad \text{ker injektivna } k \mapsto 4k$$

$$|S| = |\mathbb{N}| \quad \text{ker bijektivna } 2n \mapsto n$$

Izrek (Cantor-Schröder-Bernstein)

Če $|A| \leq |B|$ in $|B| \leq |A|$, potem $|A| = |B|$.

Se pravi:

Če obstajata injektivni $f: A \rightarrow B$ in $g: B \rightarrow A$,
potem obstaja bijektivna $h: A \rightarrow B$.

Dokaz: Objavljeno na spletni učilnici.

Def: Množica A je

(1) končna, če obstaja $n \in \mathbb{N}$ in bijekcija $\{0, 1, \dots, n-1\} \rightarrow A$
(elemente A lahko naštejemo s končnim seznamom brez ponavljanja)

(2) neskončna, če ni končna.

(3) števna, če $|A| \leq |\mathbb{N}|$, se pravi
obstaja injektivna $A \rightarrow \mathbb{N}$

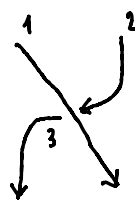
(4) števno neskončna, če $|A| = |\mathbb{N}|$

(5) neštevna, če ni števna.

Izrek: Če je A neskončna, potem $|\mathbb{N}| \leq |A|$

Brez dokaza.

Oznaka: $|\mathbb{N}| = \aleph_0$ alef :



$\aleph$ $\aleph$

Izrek: $|A| \leq |B| \Leftrightarrow A = \emptyset$ ali obstaja surjektivna $B \rightarrow A$.

Dokaz:

$\Rightarrow$ Denimo $f: A \rightarrow B$ injektivna.

Obravnavamo dva primera:

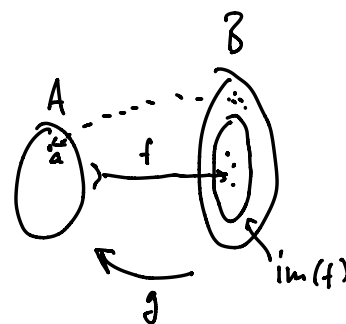
(1) $A = \emptyset$: očitno

(2) $A \neq \emptyset$: torej obstaja neki $a \in A$.

Iščemo surjekcijo $g: B \rightarrow A$.

Definiramo:

$$g(b) = \begin{cases} f^{-1}(b) & \text{če } b \in \text{im}(f) \\ a & \text{sicer} \end{cases}$$



zakaj je g dobro definirana? Trdimo: g surjektivna.
(zakaj?)

$\boxed{\Leftarrow}$ Denimo $A = \emptyset$ ali $\exists$ surjektivna $B \xrightarrow{g} A$.

(1) $A = \emptyset$: obstaja injektivna $\emptyset \rightarrow B$, namreč prazna funkcija.

(2) $g: B \rightarrow A$ surjektivna. Iščem injektivno $A \rightarrow B$.

Po izreku zgoraj ima g prerez $s: A \rightarrow B$.

s je injektivna, ker so prerezi injektivni. $\boxed{\square}$
(Smo dokazali leta 2014.)