Urejenost

Def: <u>Delna urejenost</u> je množica S z relacijo $\leq$ na S, da je $\leq$ refleksivna, tranzitivna in antisimetrična.

<u>Primeri:</u>

- Relacija $\leq$ na $\mathbb{R}$:
  $x \leq x$ ✓
  $x \leq y \wedge y \leq z \Rightarrow x \leq z$ ✓
  $x \leq y \wedge y \leq x \Rightarrow x = y$ ✓

  <u>linearna</u>: $x \leq y \vee y \leq x$

- Relacija $|$ na $\mathbb{Z}$: $a | b$ "a deli b"
  $\exists c \in \mathbb{Z} .\ a \cdot c = b$

  $a | a$ ✓
  $a | b \wedge b | c \Rightarrow a | c$ ✓
  $a | b \wedge b | a \Rightarrow a = b$ ✗
  $3 | -3 \wedge -3 | 3$ vendar $3 \neq -3$

  $\left.\begin{array}{l} a \cdot c_1 = b \\ b \cdot c_2 = a \end{array}\right\}$ $b \cdot c_2 \cdot c_1 = b$
  $c_2 \cdot c_1 = 1$

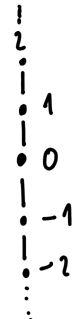
  NI DELNA!

- Relacija $|$ na $\mathbb{N}$: je delna, linearna? $a|b \vee b|a$? $2|3 \vee 3|2$ NE

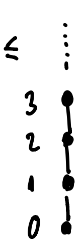
- T množica, relacija $\subseteq$ na $\mathcal{P}(T)$ je delna:
  $A \subseteq A$ ✓
  $A \subseteq B \wedge B \subseteq C \Rightarrow A \subseteq C$ ✓
  $A \subseteq B \wedge B \subseteq A \Rightarrow A = B$ ✓

Hassejev diagram:

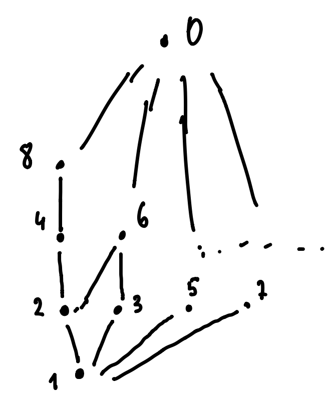
$\mathbb{Z}, \leq$



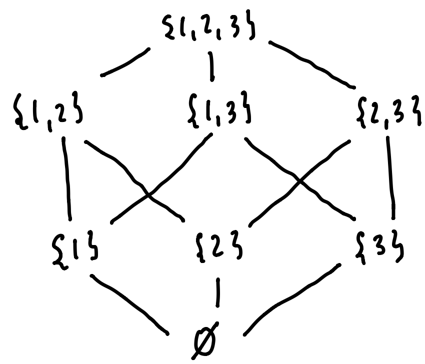
$\mathbb{N}, \leq$



$\mathbb{N}, |$



$\mathcal{P}(\{1,2,3\})$



<u>Stroga</u> delna urejenost $<$ (irefleksivna, tranzitivna)

$$x < y \overset{\text{def}}{\iff} x \leq y \wedge x \neq y$$

$$x \leq y \iff x = y \vee x < y$$

<u>Def</u>: Naj bo $(P, \leq)$ delna urejenost in $S \subseteq P$ in $x \in P$:

- x je <u>spodnja meja</u> za S, če $\forall y \in S.\ x \leq y$
- x je <u>zgornja meja</u> za S, če $\forall y \in S.\ y \leq x$

- x je <u>infimum</u> ali natančna spodnja meja S če je
  - spodnja meja za S
  - če je tudi y spodnja meja za S, potem $y \leq x$

  To je: x je največja spodnja meja za S.

- x je <u>supremum</u> ali natančna zgornja meja S, če je
  - zgornja meja za S
  - če je tudi y zg. meja za S, potem $x \leq y$

x je infimum S s formulo:

$$\underbrace{(\forall z \in S.\ x \leq z)}_{x \text{ je sp. meja } S} \wedge \underbrace{\forall y \in P.}_{\text{če}} \underbrace{(\forall z \in S.\ y \leq z)}_{y \text{ sp. meja za } S} \underbrace{\Rightarrow y \leq x}_{\text{potem } y \leq x}$$

Izjava: Če sta x in y infimuma za S, potem $x=y$.

Dokaz: Imamo $(P, \underset{\text{delna}}{\leq})$, $S \subseteq P$, $x, y \in P$.

Ker je x infimum za S, je x spodnja meja za S, torej $x \leq y$, saj je y največja spodnja meja za S.

Podobno sledi $y \leq x$.

Ker je $\leq$ antisimetrična, sledi $x=y$. ∎

Če infimum S obstaja, ga označimo $\bigwedge S$ ali $\inf S$.

Simetrično: če sta x in y supremuma za S, potem $x=y$.

Oznaka za supremum S: $\bigvee S$ ali $\sup S$.

Primeri:

1) $(\mathbb{R}, \leq)$

$S = \{1,2\}$ $\quad \bigvee S = 2$

$S = (-2,-1)$ $\quad \bigvee S = -1$

$\bigwedge S = -2$

$S = \mathbb{N}$ $\quad$ ni sup

$\bigwedge \mathbb{N} = 0$

$S = \mathbb{R}$ $\quad$ ni sup, ni inf

2) $(P, \leq)$

- $\sup \{x\} = \inf \{x\} = x$
- $\sup \emptyset$? $\quad$ x je zg. meja za $\emptyset$: $\forall y \in \emptyset .\, y \leq x$

Vsak $x \in P$ je zg. meja za $\emptyset$.

$\sup \emptyset$ je najmanjši element P, če obstaja

Podprimer: $(\mathbb{R}, \leq)$ $\quad \sup \emptyset$ ga ni

$([0,1], \leq)$ $\quad \sup \emptyset = 0$

$((\sqrt{2}, 7), \leq)$ $\quad \sup \emptyset =$ ga ni

Podobno za inf.

<u>Def</u>: Delna urejenost $(P, \leq)$ je

- <u>mreža</u>, če za vsaka $x, y \in P$ obstajata $\sup\{x,y\}$ in $\inf\{x,y\}$

  Pišemo: $\sup\{x,y\}$ kot $x \vee y$
  $\inf\{x,y\}$ kot $x \wedge y$

- <u>polna mreža</u> če za vsako $S \subseteq P$ obstajata $\sup S$ in $\inf S$.

<u>Primeri</u>:

- $(\mathbb{R}, \leq)$ mreža? ✓ $\quad x \vee y = \max(x,y)$
  $x \wedge y = \min(x,y)$

  polna mreža? NE $\quad \sup \mathbb{N}$ ne obstaja

- $([0,1], \leq)$ polna mreža? ✓ $\quad S \subseteq [0,1]$

- $(\mathcal{P}(A), \subseteq)$ $\quad S, T \subseteq A$

  $\sup\{S,T\} = S \cup T$
  $\inf\{S,T\} = S \cap T$

  $C \subseteq \mathcal{P}(A)$ $\quad \sup C = \bigcup C = \bigcup_{S \in C} S$

$$\inf C = \begin{cases} \bigcap C & \text{če } C \neq \emptyset \\ A & \text{sicer} \end{cases}$$

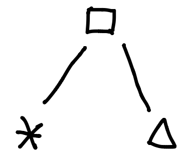
P ″

• $((0,1], \leq)$

inf $(0,1]$ v $(0,1]$ ne obstaja

sup $\emptyset$ ne obstaja

• $P = \{*, \Delta, \square\}$



$* \leq *$
$* \leq \square$
$\Delta \leq \Delta$
$\Delta \leq \square$
$\square \leq \square$

$\sup\{*, \Delta\} = \square$ vsi sup dveh so.
$\sup\{*, \square\} = \square$
$\sup\{\Delta, \square\} = \square$
$\inf\{*, \Delta\}$ ne obstaja

sup $\emptyset$ ga ni

$\inf \emptyset = \square$

• $(\mathbb{Z}, \leq)$

Mreža? ✓

ni polna ker inf $\emptyset$ ne obstaja

<u>Izrek</u>: Če v $(P, \leq)$ obstajajo vsi supremumi, potem obstajajo tudi vsi infimumi.

<u>Dokaz</u>: Naj bo $(P, \leq)$ delna.
Denimo, da v P vsaka $S \subseteq P$ ima sup.
Naj bo $T \subseteq P$. Dokažimo, da T ima inf.
<u>Ideja</u>: "inf T je ~~največja~~ spodnja meja za T."
sup?

Naj bo S množica vseh spodnjih mej za T:

$$S = \{x \in P \mid \forall y \in T.\ x \leq y\}$$

Naj bo $x_0 := \sup S$. Trdimo, da je x_0 infimum T:

(2) Preverimo x_0 je nad vsemi spodnjimi mejami:

z sp. meja za T $\Rightarrow$ $z \in S$ po def. S

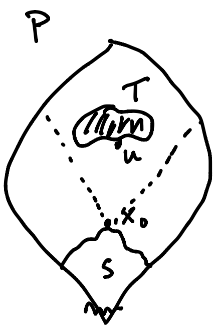
$\Rightarrow$ $z \leq x_0$ ker x_0 je sup S

(1) x_0 je spodnja meja za T; dokazujem $\forall u \in T.\ x_0 \leq u$.

Naj bo $u \in T$. Dokazujem $x_0 \leq u$:

u je zgornja meja za S po def. S $\Rightarrow$

$x_0 \leq u$ ker je x_0 najmanjša zg. meja za S.



$\blacksquare$