Ekvivalenčne relacije & kvocientne množice

Relacija $R \subseteq A \times A$ je <u>ekvivalenčna</u>, če je

- refleksivna: $\forall x \in A.\ xRx$
- simetrična $\forall x,y \in A.\ xRy \Rightarrow yRx$
- tranzitivna $\forall x,y,z \in A.\ xRy \wedge yRz \Rightarrow xRz$

Primeri:

(1) enakost na A:

$$xRy \iff x = y \qquad \text{za } x,y \in A$$

(2) polna relacija $A \times A \subseteq A \times A$

$$xRy \iff \top$$

(3) relacija "mod n" na celih številih (n je fiksno število)

$k \approx m \iff$ k in m dasta isti ostanek pri deljenju z n

Pišemo: $k \equiv m \pmod{n}$

$$\iff n \mid (k-m) \iff \exists q \in \mathbb{Z}.\ n \cdot q = k - m$$

Tranzitivnost: $k \approx m \wedge m \approx l$

$n \mid (k-m) \wedge n \mid (m-l)$

sledi: $n \mid (k-m)+(m-l)$

$n \mid k-l$ t.j. $k \approx l$.

Naj bo $\approx$ ekvivalenčna relacija na A.
<u>Ekvivalenčni razred</u> elementa $x \in A$ je

$$[x]_{\approx} = \{ y \in A \mid x \approx y \}$$

<u>Primer</u>:
Relacija "enaka po modulu 7" na $\mathbb{Z}$

$$k \approx m \iff 7 \mid (k-m)$$

$$[3]_{\approx} = \{ m \in \mathbb{Z} \mid 7 \mid m-3 \} = \{ \dots, -18, -11, -4, 3, 10, 17, 24, \dots \}$$

<u>Opazimo</u>: $[x]_{\approx} \neq \emptyset$ za vse $x \in A$.

Dokaz: Naj bo $x \in A$. Tedaj je $x \in [x]_{\approx}$, ker $x \approx x$, torej $[x]_{\approx} \neq \emptyset$.

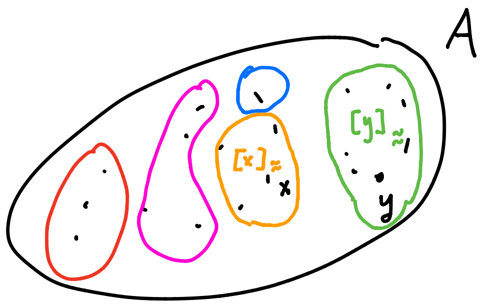
<u>Primer</u>: Ali je prazna relacija $\emptyset \subseteq A \times A$ ekvivalenčna?

Refleksivna: $\forall x \in A . (x,x) \in \emptyset$
$\forall x \in A . \bot$ velja natanko tedaj, ko je $A = \emptyset$.

Simetrična: ✓ $\forall x,y \in A . (x,y) \in \emptyset \Rightarrow (y,x) \in \emptyset$
$\forall x,y \in A . \bot \Rightarrow \bot$
$\forall x,y \in A . \top$
$\top$

Tranzitivna ✓ (razmisli)

Odgovor: $\emptyset$ je ekvivalenčna kot relacija na $\emptyset$,
<u>ni</u> ekvivalenčna kot relacija na A, A neprazna.



$\approx$

Naj bo $\approx$ ekv. relacija na A.
Naj bosta $x, y \in A$.

<u>Izrekec</u>: Če imata ekvivalenčna razreda $[x]_\approx$ in $[y]_\approx$ skupen element, potem sta enaka:

$$\left(\exists z \in A .\ z \in [x]_\approx \wedge z \in [y]_\approx\right) \Rightarrow [x]_\approx = [y]_\approx$$

$$[x]_\approx \cap [y]_\approx \neq \emptyset \Rightarrow [x]_\approx = [y]_\approx$$

$$[x]_\approx \cap [y]_\approx = \emptyset \quad \vee \quad [x]_\approx = [y]_\approx$$

<u>Dokaz</u>: Denimo, da imamo $z \in A$ in $\underset{(1)}{z \in [x]_\approx}$ in $\underset{(2)}{z \in [y]_\approx}$.

Dokazujem: $[x]_\approx = [y]_\approx$.

- Dokazujem: $\forall t \in A .\ t \in [x]_\approx \Leftrightarrow t \in [y]_\approx$.

  Naj bo $t \in A$.

  $\boxed{\Rightarrow}$ Denimo $t \in [x]_\approx$. Dokazujem $t \in [y]_\approx$.

  $t \in [x]_\approx \Leftrightarrow$

  $t \approx x$ vemo (1) $z \approx x$ tudi $x \approx z$ (simetrija)

  (2) $z \approx y$

  $t \approx x \approx z \approx y$

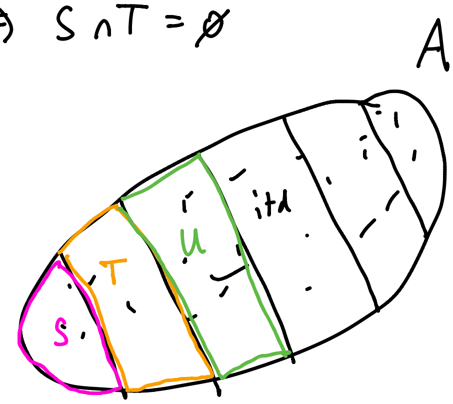
  tranzitivnost

  $t \approx y$

  $\boxed{\Leftarrow}$ podobno (premisli). ∎

Def: Particija P množice A je množica nepraznih podmnožic A, se pravi $P \subseteq \mathcal{P}(A)$ in $\forall S \in P.\ S \neq \emptyset$, da velja

- podmnožice iz P so paroma disjunktne:
$$\forall S,T \in P.\ S \neq T \Rightarrow S \cap T = \emptyset$$
- pokrivajo A:
$$\bigcup P = A$$
$$\rotatebox{90}{=}$$
$$\bigcup_{S \in P} S$$



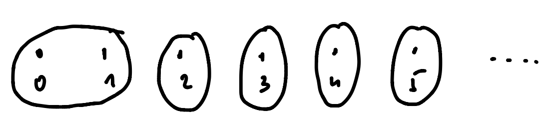
Trditev:

1) Ekvivalenčni razredi $\approx$ na A tvorijo particijo.
2) Vsaka particija določa ekvivalenčno relacijo.

"**Dokaz**":

1) $\approx$ na A: po definiciji
2) P particija množice A. Definiramo $\approx$ na A:
$$x \approx y \iff \exists S \in P.\ x \in S \wedge y \in S$$
Premisli:
- $\approx$ je ekvivalenca
- ekvivalenčni razredi $\approx$ so natanko elementi P:
$$P = \{ [x]_{\approx} \mid x \in A \}$$

Primer: Particija množice $\mathbb{N}$:
$$P = \{ \{0,1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{5\}, \dots \}$$



Določa $\approx$: $m \approx n \Leftrightarrow \exists S \in P.\ m \in S \land n \in S$

$\Leftrightarrow (m \leq 1 \land n \leq 1) \lor m = n$

<u>Def</u>: Če je $R \subseteq A \times A$ ekvivalenca na A,

$$A/R := \{ [x]_R \mid x \in A \}$$

<u>kvocient</u> A <u>po</u> R ali <u>kvocientna množica</u> množice A po R.

<u>Kvocientna preslikava</u> za R je

ksi zeta

ξ ζ

$$q_R : A \longrightarrow A/R$$

$$q_R : x \longmapsto [x]_R .$$

<u>Trditev</u>: Kvocientna preslikava je surjektivna.

Dokaz: Dokazujemo: $\forall \xi \in A/R\ \exists x \in A.\ q_R(x) = \xi$.

Naj bo $\xi \in A/R$. Torej je $\xi = [x']_R$ za neki $x' \in A$.

Vzemimo $x := x'$. Preverimo $q_R(x) = \xi$:

$$q_R(x) = q_R(x') = [x']_R = \xi . \quad \blacksquare$$

Kako definiramo funkcijo

$$f : A/R \longrightarrow B \ ?$$

Izrek: Naj bodo X, Y in Z množice,

$q : X \to Y$ surjektivna

$f : X \to Z$

(1) da velja: $\forall x, x' \in X \,.\, q(x) = q(x') \Rightarrow f(x) = f(x')$.

Tedaj obstaja natanko ena $\bar{f} : Y \to Z$, da je

$$\bar{f} \circ q = f.$$

"f se enolično faktorizira skozi q."

Diagram:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[d, "q"'] \arrow[rd, "f"] & \\ Y \arrow[r, "\bar{f}"'] & Z \end{tikzcd}$$

Dokaz: 1) Enoličnost $\bar{f}$:

Denimo, da bi imeli $g : Y \to Z$ in $h : Y \to Z$, da

$$g \circ q = f \text{ in } h \circ q = f$$

$$\begin{tikzcd} X \arrow[d, "q"'] \arrow[rd, "f"] & \\ Y \arrow[r, shift left, "g"] \arrow[r, shift right, "h"'] & Z \end{tikzcd}$$

Potem: $g \circ q = f = h \circ q$

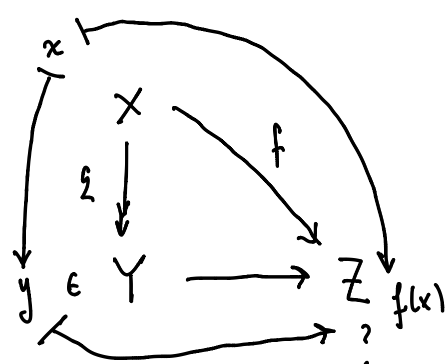
$\Rightarrow \quad g \circ q = h \circ q$ krajšamo q ker q je epi

$\Rightarrow \quad g = h$

2) Obstoj $\bar{f}$: definiramo $\bar{f}$:

Veljati mora $\bar{f} \circ q = f$

za $x \in X$: $\bar{f}(q(x)) = f(x)$



Predpis? $\quad \bar{f}(y) := f(x)$ če je $y = g(x)$

Ali je to dober predpis?

- ali vedno dobimo vsaj en rezultat?

  Ali za vsak $y \in Y$ res obstaja vsaj en $x \in X$, da je $y = g(x)$?

  Da, ker g surjektivna

- ali imamo enoličen rezultat?

  Če je $y = g(x)$ in $y = g(x')$, kako vemo

  $$f(x) = f(x') \ ?$$

  To je predpostavka (1) $\blacksquare$

$\bar{f}$ lahko definiramo kot funkcijsko relacijo:

$$\bar{f} \subseteq Y \times Z$$

$$\bar{f} = \{ (y,z) \in Y \times Z \mid \exists x \in X .\, y = g(x) \wedge z = f(x) \}$$

$$= f \circ \bar{g}$$

če gledamo na f in g kot na relaciji:

$$f \subseteq X \times Z$$

$$g \subseteq X \times Y$$

obratna $\quad \bar{g} \subseteq Y \times X$

$R \subseteq A \times A \qquad \qquad P \subseteq \mathcal{P}(A)$

A/R

$$\begin{tikzcd} A \arrow[d, "q_{\approx}"'] \arrow[dr, "f"] & \\ A/_{\approx} \arrow[r, "\bar f"'] & B \end{tikzcd}$$

Imamo ekv. relacijo $\approx$ na A.

Radi bi definirali

$$\bar f : A/_{\approx} \longrightarrow B$$

s predpisom

$$\bar f([x]_R) := f(x)$$

Ali je to dober predpis?

oz. $\bar f(q(x)) = f(x)$ za vse $x \in A$

oz. $\bar f \circ q = f$

Po izreku je to ok, <u>če</u> velja:

$$\forall x, x' \in A.\ q(x) = q(x') \Rightarrow f(x) = f(x')$$

$$\Leftrightarrow \quad \forall x, x' \in A.\ x \approx x' \Rightarrow f(x) = f(x')$$

<u>Posledica</u>: Naj bo $\approx$ ekv. relacija na A in $f : A \to B$ preslikava, ki je skladna z $\approx$, kar pomeni

$$\forall x, x' \in A.\ x \approx x' \Rightarrow f(x) = f(x').$$

Tedaj obstaja natanko ena $\bar f : A/_{\approx} \longrightarrow B$, da velja

$$\forall x \in A.\ \bar f([x]_{\approx}) = f(x).$$