Relacije

Def: Relacija med množicami $A_1, A_2, \ldots, A_n$ je podmnožica

$$R \subseteq A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n$$

n-mestna relacija
n-člena

Najpogosteje $n=2$: govorimo o (dvojiški) relaciji

$$R \subseteq \underset{\text{domena}}{A} \times \underset{\text{kodomena}}{B}$$

Namesto $(x,y) \in R$ pišemo tudi $x R y$ in beremo "x je v relaciji R z y".

Če rečemo "relacija R na množici A", mislimo na $R \subseteq A \times A$.

Primeri:

(1) Sorodstvene zveze:

$x \underbrace{\text{"je mati od"}}_{R} y$

dvojiška
domena: človek (ali ženska)
kodomena: človek

(2) Relacije med števili:

- manjše $<$ na $\mathbb{R}$, uradno

$$< \; = \{ (x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y - x \text{ je pozitivno} \}$$

z je pozitivno $\Longleftrightarrow$ z ni nenegativno $[z > 0]$ $(z \leq 0)$

z ni ~~nenegativno~~ $\Leftrightarrow \exists t \in \mathbb{R} .\ z = -t^2$ $\qquad z \leq 0$

z je pozitivno $\qquad\qquad z > 0$

$\Updownarrow$

$\neg\, \exists t \in \mathbb{R},\ z = -t^2 \qquad\qquad \neg\,(z \leq 0)$

$\forall t \in \mathbb{R} .\ z \neq -t^2 \qquad\qquad z \leq 0 \Leftrightarrow \exists t \in \mathbb{R} .\ z = -t^2$

$$< \;=\; \{ (x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid \forall t \in \mathbb{R} .\ x - y \neq t^2 \}$$

(3) Geometrija: trojiška

"točka A leži med točkama B in C"

"točke A, B in C so kolinearne"

Relacija deljivosti na $\mathbb{Z}$:

$a \mid b \qquad$ "a deli b"

$$a \mid b \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z} .\ a \cdot k = b$$

(4) Prazna relacija: $\emptyset \subseteq A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n$

Polna relacija: $A_1 \times \cdots \times A_n \subseteq A_1 \times \cdots \times A_n$

(5) Računalništvo: podatkovne baze

tabela oseba

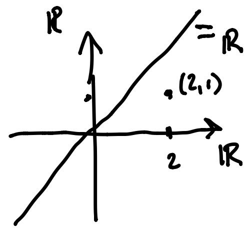
ime	priimek	teža	velikost
Ana	Novak	56	160
Miha	Novak	70	172
⋮	⋮	⋮	⋮

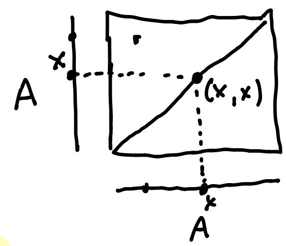
Oseba $\subseteq$ String $\times$ String $\times \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$

(6) <u>Enakost</u>: $=_A \;\subseteq\; A \times A$

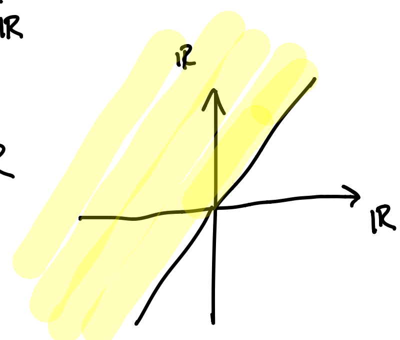
"diagonala" $\quad =_A \;=\; \{(x,x) \mid x \in A\} \subseteq A \times A$

$x =_A y \qquad (x,y) \in =_A$





Relacija $\leq$ na $\mathbb{R}$



Lastnosti relacij

<u>Def</u>: Relacija R na A je

(1) <u>refleksivna</u>, če: $\forall x \in A .\, x R x$

(2) <u>irefleksivna</u>: $\forall x \in A .\, \neg (x R x)$

(3) <u>simetrična</u>: $\forall x . y \in A .\; x R y \Rightarrow y R x$

(4) <u>antisimetrična</u>: $\forall x, y \in A .\; x R y \wedge y R x \Rightarrow x = y$

(5) <u>tranzitivna</u>: $\forall x, y, z \in A .\; x R y \wedge y R z \Rightarrow x R z$

Primeri:

Relacija	
$=_{\mathbb{R}}$	refleksivna, simetrična, antisimetrična, tranzitivna
$<_{\mathbb{R}}$	irefleksivna, antisimetrična, tranzitivna $\forall x,y \in \mathbb{R}.\ x<y \land y<x \Rightarrow x=y$?

Def: Relacija, ki je refleksivna, simetrična in tranzitivna je <u>ekvivalenčna</u> relacija.

Ekv. relacije označujemo s simboli: $=\quad \equiv \quad \cong \quad \sim \quad \approx$

Def: Relacija $R \subseteq A \times B$ je

(1) <u>totalna</u>, če $\forall x \in A\ \exists y \in B.\ x R y$

(2) <u>enolična</u>, če $\forall x \in A.\ \forall y,z \in B.\ xRy \land xRz \Rightarrow y=z$

(3) <u>funkcijska</u>, če je enolična in totalna:

$$\forall x \in A.\ \exists!\, y \in B.\ x R y.$$

Primer:

(1) $x R y$ "y je mati od x" totalna, enolična

(2) $x R y$ "y je roditelj od x" totalna, ni enolična
"x je otrok od y"

(3) $\leq$ na $\mathbb{R}$: totalna, ni enolična

(4) ni totalna, je enolična: R na realnih številih

$x R y \Leftrightarrow xy = 1$ ni totalna $(x=0)$

enolična:

$xy=1 \land xz=1 \Rightarrow y=\frac{1}{x}=z$

$x=\frac{1}{y}$

$xy=1$

Operacije na relacijah

Obratna relacija:

$R \subseteq A \times B$

definiramo $\overline{R} \subseteq B \times A \iff \overline{R} = \{ (y,x) \in B \times A \mid xRy$

$$\boxed{x R y \iff y \overline{R} x}$$

Primer:

R Relacija	$\overline{R}$ Obratna	$A \times A \setminus R$ Negacija relacije
$\leq_{\mathbb{R}}$	$\geq$	$>$
$=$	$=$	$\neq$
je delitelj	je večkratnik	ni delitelj

Kompozicija relacij:

$R \subseteq A \times B$ in $S \subseteq B \times C$

definiramo $S \circ R \subseteq A \times C$

$$S \circ R = \{ (x,z) \in A \times C \mid \exists y \in B .\ xRy \wedge ySz \}$$

$$x (S \circ R) z \iff \exists y \in B .\ xRy \wedge ySz$$

Primer:

$x R y$ "x je otrok od y"

$u \overline{R} v$ "u je roditelj od v"

$$a (\overline{R} \circ R) c \iff \exists b \in \text{Človek},\ \underbrace{aRb}_{\text{a je otrok od b}} \text{ in } \underbrace{b\overline{R}c}_{\text{b je roditelj od c}}$$

$\iff$ ~~a in c sta brat ali sestra (soro~~jenca) ali - enaka

$\Longleftrightarrow$ a in c imata skupnega roditelja

$m\,(R \circ \bar{R})\,n \Longleftrightarrow \exists l.\, m\,\bar{R}\,l$ in $l\,R\,n$

m je roditelj od l in l je otrok od n

$\Longleftrightarrow$ m in n imata skupnega otroka

<u>Def</u> (Uradna definicija funkcije)

<u>Funkcija</u> $f : A \to B$ je funkcijska relacija med A in B.

Denimo, da imamo predpis, ki določa funkcijo npr.

$2 = \{0,1\}$

$$\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto x^2+1$$

(x,y)

$\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ $\qquad \mathbb{R}^2$

Temu predpisu ustreza funkcijska relacija

$$F \subseteq \mathbb{R}\times\mathbb{R}$$
$$F = \{(u,v) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R} \mid u^2+1 = v\}$$

Če imamo funkcijsko relacijo $F \subseteq A\times B$, si lahko predstavljamo predpis

$$x \longmapsto \text{"tisti } y \in B \text{, za katerega } x\,F\,y\text{"}$$

<u>Izjava</u>: Če sta $F \subseteq A\times B$ in $G \subseteq B\times C$ funkcijski, je tudi $G \circ F \subseteq A\times C$ funkcijska.

<u>Dokaz</u>: Doma in/ali vaje.

<u>Primer</u>: Relacija $F \subseteq \mathbb{Z} \times \mathbb{N}$

$$F = \{ (k,7) \mid k \in \mathbb{Z} \}$$
$$= \{ \ldots, (-2,7), (-1,7), (0,7), (1,7), (2,7), \ldots \}$$

To je funkcija $x \mapsto 7$

Kako je s prazno množico?

1) $\forall x \in \emptyset . \varphi(x)$ je res, ne glede na φ

<u>Dokaz</u>: Naj bo $x \in \emptyset$. Dokazujem $\varphi(x)$.
$\underbrace{\text{Velja } x \notin \emptyset}_{\text{osnovna lastnost } \emptyset}$, torej $\bot$. Torej $\varphi(x)$.

2) $\exists x \in \emptyset . \varphi(x)$ ni res, ne glede na φ.

<u>Dokaz</u>: Dokazujemo: $\neg \exists x \in \emptyset . \varphi(x)$
Denimo, da bi obstajal $x \in \emptyset$ in $\varphi(x)$.
Vemo $x \notin \emptyset$, torej $\bot$.

<u>Vprašanje</u>: Koliko je relacij med $\emptyset$ in B?

$$R \subseteq \emptyset \times B = \emptyset$$

Torej $R \subseteq \emptyset$, edina možnost je $R = \emptyset$.

<u>Vprašanje</u>: Ali je $\emptyset \subseteq \emptyset \times B$ funkcijska? Da.

1) totalna: $\forall x \in \emptyset \, \exists y \in B . \, (x,y) \in \emptyset$ ✓

2) enolična: $\forall x \in \emptyset \, \forall y, z . \, \ldots$ ✓

Koliko je funkcij iz $\emptyset \to B$? Ena, in sicer prazna funkcija.

Koliko je funkcij iz $A \to \emptyset$?

$R \subseteq A \times \emptyset = \emptyset$ torej $R = \emptyset$

Imamo samo eno relacijo med A in $\emptyset$, namreč $\emptyset$

Ali je $\emptyset \subseteq A \times \emptyset$ funkcijska ?

(1) totalna: $\forall x \in A . \underbrace{\exists y \in \emptyset . (x,y) \in \emptyset}_{\perp}$

$$\Leftrightarrow \quad \forall x \in A . \perp$$

$$\Leftrightarrow \quad A = \emptyset$$

(2) enolična :

$$\forall x \in A \ \underbrace{\forall y, z \in \emptyset . \ \ldots\ldots}_{\top}$$

$$\Leftrightarrow \quad \forall x \in A . \top$$

$$\Leftrightarrow \quad \top .$$

Odgovor: $A \to \emptyset$ $\begin{cases} \text{če je } A = \emptyset \text{, potem imamo eno funkcijo, } \emptyset \\ \text{če je } A \neq \emptyset \text{, potem take funkcije ni.} \end{cases}$

Odgovor: $\emptyset^A = \begin{cases} \{\emptyset\} & \text{če } A = \emptyset \\ \emptyset & \text{če } A \neq \emptyset \end{cases} = \{ \emptyset \mid A = \emptyset \}$