Konstrukcije množic

KARTEZIČNI PRODUKT

A, B množici

$A \times B$ kartezični produkt

Elementi $A \times B$ so urejeni pari

(x, y) če $x \in A$ in $y \in B$

Projekciji

$\pi_1 : A \times B \longrightarrow A$

- $\pi_1(x, y) = x$

$\pi_2 : A \times B \longrightarrow B$

- $\pi_2(x, y) = y$

Velja za $u \in A \times B$:. $u = (\pi_1 u, \pi_2 u)$

Primer: $A = \{ *, \square \}$ $B = \{ 1, 2, 3 \}$

$A \times B = \{ (*, 1), (*, 2), (*, 3), (\square, 1), (\square, 2), (\square, 3) \}$

$$\begin{aligned} \mathbb{N} \times \mathbb{N} = \{ & (0,0), (0,1), (0,2), (0,3), \ldots, \\ & (1,0), (1,1), (1,2), \ldots \\ & (2,0), (2,1), \ldots \\ & \ldots \} \end{aligned}$$

Primer: $A \times \emptyset = \emptyset$

Enojec: množica z enim elementom:

$\{1\}$, $\{\emptyset\}$, $\{\underbrace{\{\{1,2\},\{3\}\}}_{\text{edini element}}\}$

Oznaka: $1 := \{*\}$

Primer: $A \times 1 = \{(\square,*),(\triangle,*),(\Diamond,*)\}$ $A = \{\square, \triangle, \Diamond\}$

$\neq A$

$A \times 1 \cong A$ izomorfni množici (definicija spodaj)

Def: Množici X in Y sta izomorfni, če obstaja izomorfizem $X \to Y$. Pišemo $X \cong Y$.

Formula: $X \cong Y \iff \exists f : X \to Y.\ f$ izomorfizem

$\iff \exists f : X \to Y.\ \exists g : Y \to X.\ f \circ g = id_Y \land g \circ f = id_X$.

Opazimo:

1) $X \cong X$ ker je $id_X : X \to X$ izomorfizem

2) $X \cong Y \Rightarrow Y \cong X$ ker: če je $f : X \to Y$ izomorfizem, potem je $f^{-1} : Y \to X$.

3) $X \cong Y \land Y \cong Z \Rightarrow X \cong Z$:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend right, "g \circ f"'] & Y \arrow[r, "g"] & Z \end{tikzcd}$$

$(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$

Primer: $A \times B \cong B \times A$

Izomorfizem: $f : A \times B \longrightarrow B \times A$

$$f(x,y) = (y,x)$$

$$g : B \times A \longrightarrow A \times B$$

$$g(v,u) = (u,v)$$

Preverimo ali je g inverz f:

$$f(g(v,u)) = f(u,v) = (v,u) \quad ✓$$

$$g(f(x,y)) = g(y,x) = (x,y) \quad ✓$$

Primer: $(A \times B) \times C \cong A \times (B \times C)$ vajah ali doma

$((a,b),c)$ $(a,(b,c))$

EKSPONENTNA MNOŽICA

A in B množici

B^A **eksponent** A in B

elementi B^A: funkcije $A \to B$.

Primeri: $A = \{1,2,3\}$ $B = \{\square, \Delta\}$

$$B^A = \left\{ \begin{array}{c|c} 1 & \square \\ \hline 2 & \square \\ 3 & \square \end{array}, \begin{array}{c|c} 1 & \square \\ \hline 2 & \square \\ 3 & \Delta \end{array}, \begin{array}{c|c} 1 & \square \\ \hline 2 & \Delta \\ 3 & \square \end{array}, \ldots\ldots, \begin{array}{c|c} 1 & \Delta \\ \hline 2 & \Delta \\ 3 & \Delta \end{array} \right\}$$ osem funkcij

napiši doma manjkajoče

$B^A \cong A^B$? V splošnem ne drži.

$A^1 \cong A$ ker imamo izomorfizem: $1 = \{*\}$

$$f : A^1 \longrightarrow A$$
$$f(g) = g(*)$$

$$h : A \longrightarrow A^1$$
$$h(a) = (* \mapsto a)$$

$x \mapsto 1 + x$

$y \mapsto y + 2 - 1$

Preverimo: $f(h(a)) = h(a)(*) = a$

$$h(f(g)) \stackrel{?}{=} g$$

$g \in A^1 \quad g : 1 \to A$

$f(g) \in A$

$h(f(g)) \in A^1$

$h(f(g))(*) = f(g) = g(*)$ ✓

FUNKCIJSKI PREDPISI

$$\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

- $f(x) = x^2 + 7x - 3$
- $x \mapsto x^2 + 7x - 3$
- $\lambda x . x^2 + 7x - 3$

Haskell: `\x -> x**2 + 7*x - 3`

Python: `lambda x: x**2+7*x-3`

<u>Primer:</u> $B \to B^A$

$y \mapsto (x \mapsto y)$ $\qquad \lambda y . (\lambda x . y)$

Še enkrat: $B \xrightarrow{f} B^A$

$f(y) = K_y$

pomožna definicija:
če je $y \in B$, definiramo
$K_y : A \to B$
$K_y(x) = y$

Izrek: Naj bodo A, B, C množice:

- $A \times \emptyset = \emptyset$
- $A \times 1 \cong A$
- $A \times B \cong B \times A$
- $A \times (B \times C) \cong (A \times B) \times C$
- $A^1 \cong A$
- $A^\emptyset \cong 1$
- $A^{B \times C} \cong (A^B)^C$
- $1^A \cong 1$
- $\emptyset^A \cong \emptyset$ če je A neprazna
- $\emptyset^\emptyset \cong 1$

Dokazi: vaje in kasneje

Karakteristične funkcije:

Naj bo $2 = \{0, 1\}$

$0 = \emptyset$
$1 = \{0\}$
$2 = \{0, 1\}$
$3 = \{0, 1, 2\}$

$3 = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$

Izrek: $\mathcal{P}(A) \cong 2^A$

Dokaz: Iščemo $\chi : \mathcal{P}(A) \to 2^A$ izomorfizem.

Vzemimo

$$\chi_S \in 2^A \text{ definiran s predpisom}$$

$$\chi_S(a) = \begin{cases} 0 & \text{če } a \notin S \\ 1 & \text{če } a \in S \end{cases}$$

$\chi : \mathcal{P}(A) \to 2^A \qquad S \in \mathcal{P}(A)$

$\chi_S : A \to 2 \qquad$ lahko bi pisali $\chi(S)$

$\chi_S(a) \in 2 \quad , \; a \in A \qquad$ lahko bi pisali $\chi(S)(a)$

Trdimo, da je $f : 2^A \to \mathcal{P}(A)$, definiran s predpisom

$$f(g) = \{a \in A \mid g(a) = 1\} = g^*(\{1\}).$$

Preverimo da sta χ in f inverza:

1) Naj bo $S \in \mathcal{P}(A)$: preverimo $f(\chi_S) = S$.

$$x \in f(\chi_S) \iff$$
$$x \in \{a \in A \mid \chi_S(a) = 1\} \iff$$
$$x \in A \wedge \chi_S(x) = 1 \iff$$
$$x \in A \wedge x \in S \iff$$
$$x \in A \cap S = S$$

2) Naj bo $g \in 2^A$, preverimo $\chi_{f(g)} = g$.

Naj bo $x \in A$:

$$\chi_{f(g)}(x) = \begin{cases} 0 & x \notin f(g) \\ 1 & x \in f(g) \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 0 & \neg(x \in A \text{ in } g(x) = 1) \\ 1 & x \in A \text{ in } g(x) = 1 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 0 & \neg(g(x)=1) \\ 1 & g(x)=1 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 0 & g(x)=0 \\ 1 & g(x)=1 \end{cases}$$

$$= g(x) \quad \checkmark \quad \blacksquare$$

χ_S se imenuje karakteristična funkcija podmnožice S.

VSOTA MNOŽIC

(KOPRODUKT, DISJUNKTNA UNIJA)

A in B množici

$A+B$ vsota (pišemo tudi $A \amalg B$ in $A \uplus B$)

$$A+B = (\{0\} \times A) \cup (\{1\} \times B)$$

element $A+B$ je bodisi $(0,a)$ za $a \in A$
bodisi $(1,b)$ za $b \in B$

Primer: $A = \{\square, \triangle, \Diamond\}$ $\quad B = \{\square, \Diamond\}$

$$A+B = \{(0,\square), (0,\triangle), (0,\Diamond), (1,\square), (1,\Diamond)\}$$

Inkluziji: $\quad \iota_0 : A \to A+B \qquad \iota_1 : B \to A+B$

$\quad \iota_0(x) = (0,x) \qquad \iota_1(y) = (1,y)$

Vsak element $A+B$ je bodisi $\iota_0(a)$ za $a \in A$
bodisi $\iota_1(b)$ za $b \in B$.

Kako definiramo funkcijo $f : A+B \to C$?

Obravnavamo primere, oziroma po kosih:

$$f(\iota_0(a)) = g(a) \quad \text{za neki } g : A \to C$$

$$f(\iota_1(b)) = h(b) \quad \text{za neki } h : B \to C$$

Vaje:

$$A+B \cong B+A$$

$$A+\emptyset \cong A$$

$$A+(B+C) \cong (A+B)+C$$

$$A^{B+C} \cong A^B \times A^C$$

$$(A+B)\times C \cong (A\times C)+(B\times C)$$