Peanovi aksiomi

Množica $\mathbb{N}$ in operacije (in konstanta):

- naslednik x^+
- konstanta 0
- seštevanje $x+y$
- množenje $x \cdot y$

Aksiomi:

1) $0 \neq x^+$
2) $x^+ = y^+ \Rightarrow x = y$
3) $x + 0 = x$
4) $x + y^+ = (x+y)^+$
5) $x \cdot 0 = 0$
6) $x \cdot y^+ = x \cdot y + x$
7) $P(0) \wedge (\forall x \in \mathbb{N}.\ P(x) \Rightarrow P(x^+)) \Rightarrow \forall y.\ P(y)$ indukcija

Primer

Izrek: $2+2=4$

$$2=(0^+)^+=0^{++}$$
$$4=0^{++++}$$

Dokaz:

$$2+2=0^{++}+0^{++}\underset{(4)}{=}(\underbrace{0^{++}+0^{+}})^{+}\underset{(4)}{=}$$

$$(0^{++}+0)^{++}\underset{(3)}{=}(0^{++})^{++}=0^{++++}=4.\ \blacksquare$$

Komutativnost seštevanja

<u>Izrek</u>: $\forall x, y \in \mathbb{N}.\ x+y = y+x$.

Dokaz. Naj bo $x \in \mathbb{N}$. Naj bo $y \in \mathbb{N}$. Dokažujemo $x+y=y+x$.

Uporabimo indukcijo: $(P(0) \land \forall a \in \mathbb{N}.\ (P(a) \Rightarrow P(a^+))) \Rightarrow \forall r \in \mathbb{N}.\ P(r)$

Vzemimo: $P(r) \equiv (\forall q \in \mathbb{N}.\ r+q = q+r)$.

Dokažujemo: $P(0) \land \forall a \in \mathbb{N}.\ P(a) \Rightarrow P(a^+)$.

1) Dokažujemo $P(0)$: $\forall q \in \mathbb{N}.\ 0+q = q+0$

KASNEJE

2) Dokažujemo: $\forall a \in \mathbb{N}.\ P(a) \Rightarrow P(a^+)$

Naj bo $a \in \mathbb{N}$. Dokažujemo $P(a) \Longrightarrow P(a^+)$.

Predpostavka (17) $\to$ Predpostavimo $P(a)$, t.j. $\forall q'' \in \mathbb{N}.\ a+q'' = q''+a$.

Dokažujemo $P(a^+)$, t.j. $\forall q' \in \mathbb{N}.\ a^+ + q' = q' + a^+$

Naj bo $q \in \mathbb{N}$. Dokažujemo: $a^+ + q = q + a^+$.

Dokaz

Računamo: $q + a^{+} \underset{(4)}{=} (q+a)^{+} \underset{\substack{(17)\\ q'' := q}}{=} (a+q)^{+}$

$\underset{(4)}{=} a + q^{+}$.

17: $\forall q''.\, a + q'' = q'' + a$

Doka

$= a^{+} + q$.

KASNEJE, UPAMO.

- 1 je naravno število
- Vsako naravno število naslednika
- ~~$n^{+} = \ldots \Rightarrow$~~ O ~~množ~~.
  1 ni naslednik
- $n \neq m \Rightarrow n^{+} \neq m^{+}$
- indukcija

~~$\forall n \ldots$~~ $P \Rightarrow Q$

$\neg Q \Rightarrow \neg P$

Torej vemo: $\forall r \in \mathbb{N}.\, P(r)$, t.j.

$\forall r \in \mathbb{N}.\, \forall q \in \mathbb{N}.\, r + q = q + r$

Vzemimo $r = x$ in $q = y$. Dobimo

$x + y = y + x$.

∎

Dokaz 2

<u>Izrek</u>: $\forall x \in \mathbb{N} \,.\, \forall y \in \mathbb{N} \,.\, x + y = y + x.$

<u>Dokaz</u>: Uporabimo indukcijo za $P(x) \equiv \forall y \in \mathbb{N} \,.\, x + y = y + x.$

1) Vzemimo $x = 0$: dokazujemo $P(0)$, t.j. $\forall y \in \mathbb{N} \,.\, 0 + y = y + 0$

   To bomo dokazali z lemo 1 kasneje.

2) Indukcijski korak: predpostavimo $P(j)$, naj bo $j \in \mathbb{N}$. dokazujemo $P(j^+)$.

   Predpostavimo $\forall y' \in \mathbb{N} \,.\, j + y' = y' + j.$ $\quad (17)$

   Dokazujemo: $\forall y \in \mathbb{N} \,.\, j^+ + y = y + j^+.$

   Naj bo $y \in \mathbb{N}$. Dokazujemo: $j^+ + y = y + j^+.$

   Računamo:

$$y + j^+ \underset{4}{=} (y + j)^+ \underset{(17)}{=} (j + y)^+ \underset{\uparrow}{=} j^+ + y \qquad \blacksquare$$

Lema 1

$$\forall y \in \mathbb{N},\ y + 0 = 0 + y$$

<u>Dokaz</u>: Indukcija:

1) Ko je $y = 0$: $\quad 0 + 0 = 0 + 0$ ✓

2) Indukcijski korak: predpostavimo $k + 0 = 0 + k$

dokazujemo $k^+ + 0 = 0 + k^+$

Računamo na levi: $k^+ + 0 \underset{3}{=} k^+$

Računamo na desni: $0 + k^+ \underset{4}{=} (0 + k)^+ \underset{\substack{\text{Ind.}\\ \text{predp.}}}{=} (k + 0)^+ \underset{3}{=} k^+$

Obe sta enaki.

$\blacksquare$

Lema 2 $\forall a \in \mathbb{N}\ \forall b \in \mathbb{N}.\ (a+b)^+ = a^+ + b.$

<u>Dokaz</u>: Indukcija na b.

1) Baza (b=0): $\forall a \in \mathbb{N}.\ (a+0)^+ = a^+ + 0.$

Naj bo $a \in \mathbb{N}$. Računamo

$$(a+0)^+ \underset{3}{=} a^+ \underset{3}{=} a^+ + 0.$$

2) Ind. korak: predpostavimo $\forall a \in \mathbb{N}.\ (a+c)^+ = a^+ + c.$

dokažujemo $\forall d \in \mathbb{N}.\ (d+c^+)^+ = d^+ + c^+.$

Naj bo $d \in \mathbb{N}$. Dokazujem $(d+c^+)^+ = d^+ + c^+.$

Računamo:

$$(d+c^+)^+ \underset{4}{=} ((d+c)^+)^+ \underset{\substack{\text{I.P.} \\ a=d}}{=} (d^+ + c)^+ \underset{4}{=} d^+ + c^+.$$

$\blacksquare$