Kako pišemo dokaze

- Uporaba $A \Rightarrow B$:

  1) Dokažemo A
  2) Torej velja B

  modus ponens

- Resnica $\top$: ni uporabno
- Neresnica $\bot$: karkoli že dokazujemo, velja

  Primer: Če je $1=2$, potem je Vid papež.

  $1=2 \Rightarrow \text{Vid} = \text{papež}.$

  Dokaz:

  Predpostavimo $1=2$.

  Dokazujemo Vid = papež.

  Tvorim $A = \{\text{Vid}, \text{papež}\}$. Moč A je 1 ali 2.

  Ker je $1=2$, je moč množice A enaka 1 (in 2).

  Torej ima A en element, zato je Vid papež.

Uporaba neresnice

- $x \geq 0$ ali $x < 0$ $\to$
- $y \geq 0$ ali $y < 0$ $\to$
- $x+y \geq 0$ ali $x+y < 0$ $\to$

1) $x \geq 0$, $y \geq 0$, $x+y \geq 0$: ....

2) $x < 0$, $y \geq 0$, $x+y \geq 0$:

⋮

$\underbrace{x < 0, \; y < 0}_{x+y<0}$, $x+y \geq 0$: $\to \bot$

$\Leftrightarrow \neg(x+y \geq 0) \to \bot$

$x \neq 0$

$\neg(x = 0)$

$x < 0 \vee x > 0$

$\neg(x \geq 0)$

$x < 0$

- <u>Negacija</u>: $\neg A$
  - dokažemo A
  - to je v protislovju z $\neg A$, torej zaključimo dokaz.

Uporaba

- Uporaba $\forall x \in S . \varphi(x)$:
  - → Vemo, da velja $\forall x \in S . \varphi(x)$
  - → Vemo, da je $a \in S$.
  - → Torej velja $\varphi(a)$.

- Uporaba $\exists x \in S . \varphi(x)$:
  - → Vemo, da obstaja $x \in S$, za katerega $\varphi(x)$.
  - → Dokazujemo ψ.

1. Izberemo "svežo" spremenljivko y, ki se ne pojavi v trenutnih predpostavkah in ψ. (lahko je x).
2. Naj bo $y \in S$. Predpostavimo $\varphi(y)$. Dokažemo ψ.

Primer

Dokaži: $(\exists x \in S .\, x \leq 7) \Rightarrow (\exists \text{đ} \in S .\, \text{đ} \leq 8)$

Dokaz: Predpostavimo $\exists x \in S .\, x \leq 7$.

Dokažimo $\exists \text{đ} \in S .\, \text{đ} \leq 8$.

~~Vzemimo đ := x.~~

Po predpostavki imamo neki $y \in S$,

za katerega: $y \leq 7$.

Vzemimo $\text{đ} := y$.

Preverimo: $y \leq 8$. Očitno :)

Dokaz: Imamo $x \in S$, za katerega $x \leq 7$.

Vzemimo $\text{đ} := x$. Preverimo: $x \leq 8$. Očitno.

QED. ∎

Zakon o izključeni tretji možnosti

Velja φ ali $\neg\varphi$, za vsako izjavo φ.

Posledice: $(\varphi \Rightarrow \psi) \Leftrightarrow (\neg\varphi \vee \psi)$

Ponavadi:

Velja $x \in S$ ali $x \notin S$.

Primer: če $x \in S$, ……

Primer: če $x \notin S$, …

Dokaz s protislovjem $(\neg\neg\varphi \Rightarrow \varphi)$

Dokazujemo φ.
Dokazujemo s protislovjem:

- Predpostavimo $\neg\varphi$. Iščemo protislovje:
  ......

NI ISTO KOT DOKAZ NEGACIJE!!

Dokaz negacije:

Dokazujemo $\neg\psi$.

- Predpostavimo ψ. Iščemo protislovje: ....

Izrek 5 iz Analize 1

$\forall a \in \mathbb{R}.\ \forall \{a_n\}_{n=1}^{\infty}.$

(vsaka okolica a vsebuje člen $\{a_n\}_n$) $\Rightarrow$

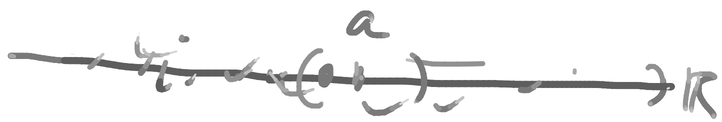
(a je stekališče $\{a_n\}_n$)

$\forall a \in \mathbb{R}\ \forall \{a_n\}_{n=1}^{\infty}.$

($\forall \varepsilon > 0.$ interval $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ vsebuje člen $\{a_n\}_n$) $\Rightarrow$

(a je stekališče $\{a_n\}_n$).

Še enkrat



(vsaka okolica števila a vsebuje neki člen zap. $\{a_n\}_n$, $a_n \neq a$) $\Longrightarrow$ (a je stekališče $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$)

($\forall \varepsilon > 0 .$ $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ vsebuje neki člen $\{a_n\}_n$, ki je različen od a) $\Longrightarrow$ (a je stekališče $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$)

$$\left(\forall \varepsilon' > 0 .\ \underline{\exists n \in \mathbb{N} .\ |a_n - a| < \varepsilon' \wedge a_n \neq a} \right) \Longrightarrow \left(a \text{ je stekališče } \{a_n\}_{n=1}^{\infty} \right)$$