Združevanje - zakaj se ustavi?

$\{ L_1 = R_1, L_2 = R_2, \ldots, L_n = R_n \}$

$A_1 \to A_2 = B_1 \to B_2$

$A_1 = B_1$, $A_2 = B_2$

V vašem kvartetu:

1) Odstranimo enačbo E
2) Dodamo nekaj novih, manjših od E.

velikost	1	2	3	4	5	6
število enačb	0	0	0	(1)	0	2
	0	2	3	0	0	(2)
	0	2	3	(4)	0	1
	17	2	3	3	0	1

leksikografska urejenost

Izpeljava tipov

$$\frac{\Gamma \vdash e_1 \Rightarrow t_1, \mathcal{E}_1 \qquad \Gamma \vdash e_2 \Rightarrow t_2, \mathcal{E}_2}{\Gamma \vdash e_1\, e_2 : \alpha,\ \mathcal{E}_1 \cup \mathcal{E}_2 \cup \{ t_1 = t_2 \to \alpha \}} \quad (\alpha \text{ nov})$$

Primer: $\underbrace{(\text{fun } x \to x)}_{e_1}\ \underbrace{42}_{e_2}$

e_1 $\quad \dfrac{x : \alpha \vdash x : \alpha}{\text{fun } x \to x : \alpha \to \alpha,\ \emptyset}$

e_2 $\quad 42 : \text{int},\ \emptyset$

$e_1\, e_2 : \beta,\ \emptyset \cup \emptyset \cup \{ \alpha \to \alpha = \text{int} \to \beta \}$ $\quad \alpha \mapsto \text{int}$, $\beta \mapsto \text{int}$

$(\text{fun } x \to x)\ 42$ ima tip $\boxed{\beta}$ pri pogoju $\{\alpha \to \alpha = \text{int} \to \beta\}$

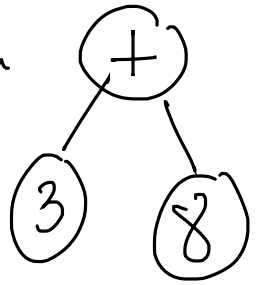
$\{\alpha = \text{int},\ \alpha = \beta\}$

$\{\text{int} = \beta\}$ $\{\}$

$\underline{\text{int}}$

Denotacijska semantika

$x \mapsto x^2 + 3 \qquad x : \mathbb{N}$

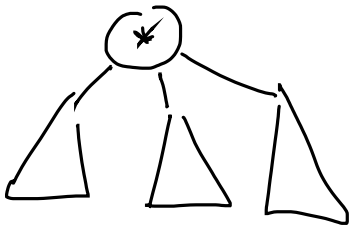
- Izrazom v prog. jeziku priredimo njihov matematični pomen.
- Pomen 

je število enajst.

Semantika: prirejanje pomena sint. izrazom.

- Denotacijska semantika:

pomen celotnega izraza je funkcija pomenov podizrazov.



if p then A else B

5 7 10 → 5 + 7 ali 5 + 10

↑ ↑ ↑

Oznake

$[\![e]\!]$ pomen izraza / tipa e

$[\![42]\!] = 42$ $[\![\ ]\!]$ je preslikava iz sintakse v matematične objekte (množice, števila, funkcije, topol. prostori)

↑ niz znakov 4 in 2 ↖ število

Denotacijska semantika aritm. izrazov s spremenljivkami:

Tipi $\tau ::= int$

$e ::= \dots -2 \mid -1 \mid 0 \mid 1 \mid 2 \mid \dots$

$x \mid e_1 + e_2 \mid e_1 \cdot e_2 \mid e_1 - e_2$

Izraz v kontekstu: $x : int, y : int, z : int \mid 3 \cdot x + 4 : int$

$[\![\Gamma \mid e]\!]$ matem. pomen izraza v kontekstu.

Aritmetični izrazi

$[\![x : int, y : int \mid 3 \cdot x + 4]\!] : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$

$[\![int]\!] = \mathbb{Z}$

$[\![x : int \mid 3 \cdot x + 4]\!] : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$

$[\![x_1 : int, x_2 : int \mid x_1]\!] : \mathbb{Z}^2 \to \mathbb{Z}$, $(n_1, n_2) \mapsto n_1$

Definiramo:

$[\![x_1 : int, \ldots, x_n : int]\!] = \underbrace{\mathbb{Z} \times \cdots \times \mathbb{Z}}_{n}$

$[\![\Gamma \mid e]\!] : [\![\Gamma]\!] \to \mathbb{Z}$

$\Gamma = x_1 : int, \ldots, x_n : int$

$[\![\Gamma \mid x_i]\!] (k_1, \ldots, k_n) = k_i$

$\eta = (k_1, \ldots, k_n)$

$[\![\Gamma \mid n]\!] \eta = n$

(n: izraz, n: število)

$[\![x : int, y : int \mid 15]\!]$, $(k_1, k_2) \mapsto 15$

$[\![\Gamma \mid e_1 + e_2]\!] \eta = [\![\Gamma \mid e_1]\!] \eta + [\![\Gamma \mid e_2]\!] \eta$

($+$: simbol; seštevanje (funkcija))

Aritmetični izrazi z deljenjem

$e ::= x \mid n \mid e_1 + e_2 \mid e_1 \cdot e_2 \mid e_1 - e_2 \mid e_1 / e_2$

$A_\perp = A \cup \{\perp\}$

$A \to B$

$A \to B \cup \{\perp\}$

Kaj je pomen izraza $3/(5-5)$?

1) Nima pomena

2) $\mathbb{Z}$ ju dodamo posebno vrednost "nedefinirano" $\perp$ (dno)

$[\![int]\!] = \mathbb{Z} \cup \{\perp\} =: \mathbb{Z}_\perp$ $\quad [\![x_1 : int, \ldots, x_n : int]\!] = (\mathbb{Z}_\perp)^n$

$[\![\Gamma, x_i]\!] (k_1, \ldots, k_n) = k_i$

$$[\![\Gamma \mid e_1 / e_2]\!] \eta = \begin{cases} \perp & \text{če } [\![\Gamma \mid e_2]\!]\eta = 0,\ [\![\Gamma \mid e_2]\!] = \perp, \text{ ali } [\![\Gamma \mid e_1]\!] = \perp \\ m & \text{kjer } m = [\![\Gamma \mid e_1]\!] \div [\![\Gamma \mid e_2]\!] \end{cases}$$

(celoštevilsko deljenje)

$$[\![\Gamma \mid e_1 + e_2]\!] = \eta = \begin{cases} \perp \text{ če } [\![\Gamma \mid e_1]\!] = \perp \text{ ali } [\![\Gamma \mid e_2]\!] = \perp \\ [\![\Gamma \mid e_1]\!] + [\![\Gamma \mid e_2]\!] \text{ če } [\![\Gamma \mid e_1]\!], [\![\Gamma \mid e_2]\!] \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Denotacijska semantika PCF

PCF = "MiniHaskell – seznami"

Tipi: $\tau ::= bool \mid nat \mid \tau_1 \to \tau_2$

Izrazi: $e ::= 0 \mid true \mid false \mid x \mid succ\ e \mid pred\ e \mid$
$iszero\ e \mid if\ e_1\ then\ e_2\ else\ e_3 \mid$
$fun\ x:\tau \to e \mid e_1\ e_2 \mid rec\ x:\tau\ is\ e$

Len jezik.

$(int \to int) \to int$

Rekurzija = negibne točke.

$a := rec\ x:\tau\ is\ \varphi(x)$

$\varphi : \tau \to \tau$
$a : \tau$
$a = \varphi(a)$

$f : S \to S$
$b \in S$
$b = f(b)$

$[\![\tau]\!]$ množica S

$[\![\tau \to \tau]\!]$ = funkcije iz $[\![\tau]\!]$ v $[\![\tau]\!]$

$\bot \mapsto 0$
$0 \mapsto 1$
$1 \mapsto 2$
$2 \mapsto 3$
$\vdots$

$(fun\ x:nat \to x)$

Domene

$A_\perp = A \cup \{\perp_A\}$

Idea: definiramo $\leq$, delna urediter

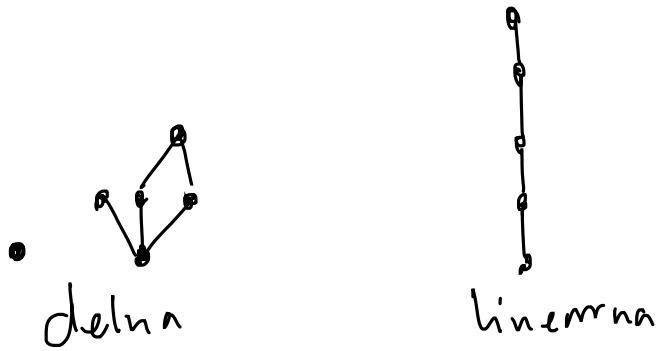
$x \leq y$ pomeni "x vsebuje manj informacije kot y"

Def: Delna urediter $\leq$ na S je relacija na S, ki je:

(1) refleksivna $x \leq x$

(2) tranzitivna $x \leq y \wedge y \leq z \Rightarrow x \leq z$

(3) antisimetrična $x \leq y \wedge y \leq x \Rightarrow x = y$.



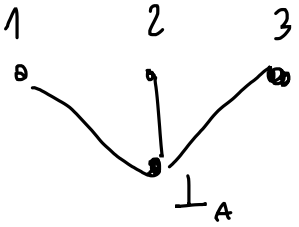
Dvig množice

A množica

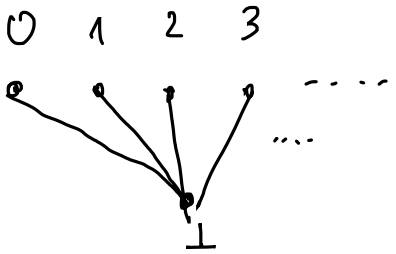
$A_\perp = A \cup \{\perp_A\}$ dvig množice A

definiramo $x \leq_A y \iff x = \perp_A \vee x = y$

Primer: $A = \{1, 2, 3\}$ $A_\perp = \{\perp, 1, 2, 3\}$



$\mathbb{N}_\perp$



Kartezični produkt delnih ureditev

$(D, \leq_D)$ in $(E, \leq_E)$ delni ureditvi

$(D \times E, \leq_{D \times E})$

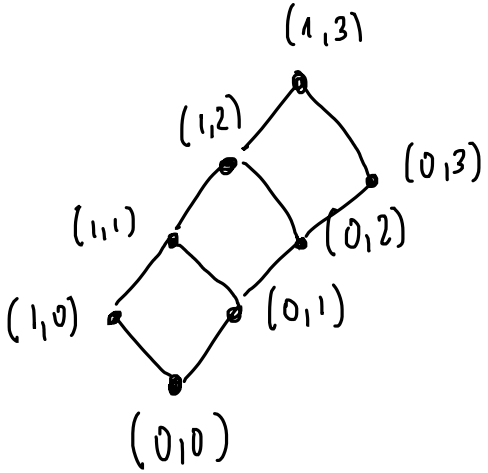
$(d_1, e_1) \leq_{D \times E} (d_2, e_2) \Leftrightarrow d_1 \leq_D d_2$ in $e_1 \leq_E e_2$

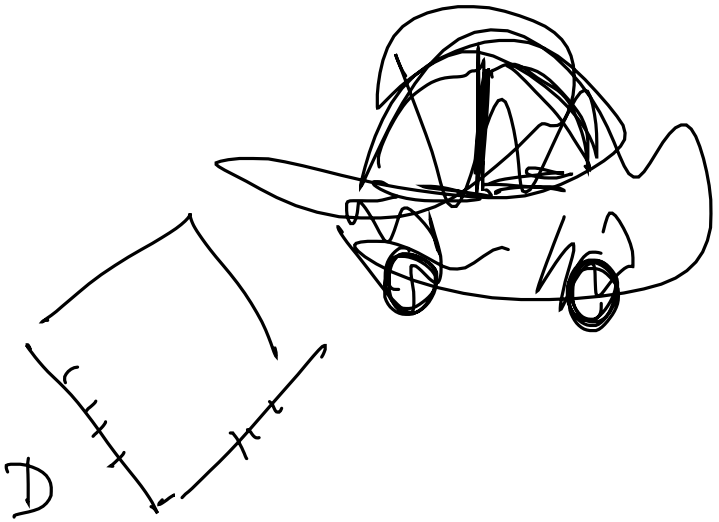
Primer:

$D = \{0, 1\}$ $0 \leq 1$

$E = \{0, 1, 2, 3\}$ $0 \leq 1 \leq 2 \leq 3$

$D \times E$





Monotone funkcije

$f : D \to E$ $\quad (D, \leq_D)$, $(E, \leq_E)$ delni urediti

monotona : $\quad x \leq_D y \Rightarrow f(x) \leq_E f(y)$.

$S \subseteq D$ in $x \in D$. $\quad$ x je zgornja meja za S : $\forall y \in S.\ y \leq_D x$.

(pišemo $S \leq_D x$)

Supremum S je tak $x \in D$, da velja:

(1) $S \leq_D x$

(2) $\forall y \in D.\ S \leq_D y \Rightarrow x \leq_D y$

Primer: $(\mathbb{Q}, \leq)$ $\quad \sup \{q \in \mathbb{Q} \mid q < 0\} = 0$

$\sup \{q \in \mathbb{Q} \mid q^2 < 2\}$ ni ga.

Domena

Naj bo $(D, \leq)$ delna urejitev.

Veriga v D je neskončno zaporedje, ki narašča

$$x_0 \leq x_1 \leq x_2 \leq \cdots$$

Domena (ali ω-cpo) je delna urejitev, v kateri ima vsaka veriga supremum.

Naj bosta $(D, \leq_D)$ in $(E, \leq_E)$ domeni. Funkcija $f : D \to E$ je zvezna, če je

(1) monotona in

(2) ohranja supremume verig: če je $(x_i)_{i \in \mathbb{N}}$ veriga v D,

$$f\left(\bigvee_n x_n\right) = \bigvee_n f(x_n)$$

[$\bigvee_n x_n$ je supremum verige.

Izrek o negibni točki

$f : D \to D$

Vsaka zvezna funkcija $\sharp$ima najmanjšo negibno točko.

Semantika:

$[\![\tau]\!]$ domena

$[\![\Gamma]\!]$ produkt domen (domena)

$[\![\Gamma \mid e : \tau]\!]$ zvezna funkcija $[\![\Gamma]\!] \longrightarrow [\![\tau]\!]$

Poanta:

$[\![\Gamma \mid \mathrm{rec}\ x : \tau\ \mathrm{is}\ \varphi(x)]\!]$ najmanjša negibna točka funkcije $[\![\varphi]\!] : [\![\tau]\!] \downarrow [\![\tau]\!]$