λ-račun

~~for~~, ~~while~~, ~~objekte~~, ~~float~~, ~~int~~, ~~bool~~, ~~tabele~~,

$\hookrightarrow$ funkcije (~~rekurzivne~~)

Funkcijski predpisi

$$x \longmapsto x^2+3x$$

"x se slika v x^2+3x"

funkcijski predpis
(anonimna funkcija)

$$f(x) := x^2+3x$$

1. Podali smo predpis
2. Poimenovali smo ga f

$$f := (x \longmapsto x^2+3x) \longrightarrow$$

funk. predpis je bolj splošen kot imenovane funkcije

Uporaba ali aplikacija:

$$f(7)$$

argument

f uporabi na 7

$$(x \longmapsto x^2+3x)(7)$$

uporaba

Zapis:

$$x \longmapsto e$$

λ-račun: $\lambda x . e$

Python: `lambda x : e`

⋮

Vezane & proste spremenljivke

```
x = 8        globalna → x je prost
a = 5

def f(x, y):          lokalna (lokalna)
    x = x + 2
    a = a + 3
    return a + x * y
```

x ima območje veljavnosti "x je vezan" v tem območju

f(x, 2)   x = 8

$x \mapsto x^2 + 3 \cdot a$ "x se slika v $x^2 + 3 \cdot a$"

"kvadriraj in prištej trikratnik a"

$y \mapsto y^2 + 3a$ TO JE ISTI PREDPIS!

Vezano spremenljivko lahko preimenujemo (vendar ne v že obstoječo prosto spremenljivko)

$a \mapsto a^2 + 3a$ UJELI SMO a

"a se je ujel"

s, a

for (... i ...)

s, a

for (... j ...)

s, a, i

Preimenuj

$j \rightsquigarrow k$ ✓

$j \rightsquigarrow i$ ✓

$$\int_0^1 \underbrace{(x^2 + ax)}\, dx = \int_0^1 (t^2 + at)\, dt = \frac{1}{3} + \frac{a}{2}$$

x je vezana

tukaj

$$\neq \int_0^1 (a^2 + a \cdot a)\, da = \frac{2}{3}$$

!!!

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{x^i}{i!}$$

i je vezana

Zamenjava ali substitucija

$(x^2 + 3 \cdot a)$ x zamenjaj z 10

$\downarrow$

$10^2 + 3 \cdot a$

$$(x^2 + 3 \cdot a)[x/10] \rightsquigarrow 10^2 + 3 \cdot a$$

$$(x^2 + 3 \cdot a)[x/(u+x)^2+a] \rightsquigarrow (((u+x)^2+a)^2 + 3 \cdot a)$$

$$(x^2 + 3 \cdot a)[x/7, a/x] \rightsquigarrow (7^2 + 3 \cdot x)$$

$$\left(\int_0^1 x^2+3a\,dx\right)[y/7] = \int_0^1 x^2+3a\,dx$$

$$\left(\int_0^1 x^2+3\cdot a\,dx\right)[a/7] = \int_0^1 x^2+3\cdot 7\,dx$$

$$\left(\int_0^1 x^2+3a\,dx\right)[x/7] = \int_0^1 x^2+3a\,dx$$

$$\left(\int_0^1 x^2+3a\,dx\right)[a/(x+2)] = \int_0^1 x^2+3\cdot(x+2)\,dx$$

NAROBE!

x se je ujel

$$\left(\int_0^1 x^2+3a\,dx\right)[a/(x+2)] =$$ (preimenujemo vezani x)

$$\left(\int_0^1 m^2+3a\,dm\right)[a/(x+2)] = \int_0^1 m^2+3(x+2)\,dm$$

PRAV

$$(x \mapsto x^2+3a)\,[a/7] = (x \mapsto x^2+3\cdot 7)$$

$$(x \mapsto x^2+3a)\,[a/x] = (y \mapsto y^2+3a)[a/x] = (y \mapsto y^2+3x)$$

PREIMENUJEMO vezani x, da se prosti x ne bo ujel

λ - račun

Namesto $x \mapsto e$ pišemo $\lambda x . e$

$$
\begin{array}{rcll}
\langle \text{izraz} \rangle & ::= & \langle \text{spremenljivka} \rangle & \\
& | & \lambda \langle \text{spremenljivka} \rangle . \langle \text{izraz} \rangle & \lambda\text{-abstrakcija} \\
& | & \langle \text{izraz} \rangle \ \langle \text{izraz} \rangle & \text{aplikacija}
\end{array}
$$

Namesto $f(7)$ pišemo $f\ 7$

Aplikacija je levo asociativna: $a\ b\ c = (a\ b)\ c$

Funkcijske predpise oz. abstrakcije lahko gnezdimo:

$$(x \mapsto (y \mapsto 3x^2 + 8xy))$$

x slika v funkcijo $y \mapsto 3x^2 + 8xy$

$$\lambda x . (\lambda y . (3x^2 + 8xy))$$

$$\lambda x . \lambda y . 3x^2 + 8xy$$

OPOMBA: to v resnici ni del λ-računa

$$\lambda x . ((\lambda y . (y^2 + 7x))\ 5 + 8x)$$

$$\lambda x . (x\ 5) \neq (\lambda x . x)\ 5$$

$$\lambda x.\lambda y.\lambda z.\,\ldots \quad = \quad \lambda x\, y\, z.\,\ldots$$

Računsko pravilo β-redukcija

$$f(x) = x^2 + 7$$

Izračunaj: $f(5) \rightsquigarrow$ vstavimo 5 $\rightsquigarrow 5^2 + 7 \xrightarrow{\text{računamo s števili}} \ldots\ 32$

$(x \mapsto x^2 + 7)\ 5 \rightsquigarrow$ zamenjaj x s $5 \rightsquigarrow 5^2 + 7$

β-pravilo

$$(x \mapsto e_1)\ e_2 = e_1[x/e_2]$$

$$(\lambda x.e_1)\ e_2 = e_1[x/e_2]$$

$$(x \mapsto (y \mapsto 3a + x^2 \cdot y))\ 5 = (y \mapsto 3a + 5^2 \cdot y)$$

$$(f \mapsto f(f\ a))\ (x \mapsto x^2 + 1) =$$

$$(x \mapsto x^2+1)((x \mapsto x^2+1)\ a) =$$

$$(x \mapsto x^2+1)\ (a^2+1) =$$

$$(a^2+1)^2 + 1$$

$$(\lambda f . f(f a))(\lambda x . x^2+1) =$$

$$(\lambda x . x^2+1)((\lambda x . x^2+1) a) =$$

izraz, kjer lahko naredimo računski korak, se imenuje

REDEKS

(lahko ga reduciramo)

$$(\lambda y . y^2+1)((\lambda x . x^2+1) a) =$$

$$((\lambda x . x^2+1) a)^2 + 1 =$$

$$(a^2+1)^2 + 1$$

$$\underline{3 \cdot 7} + \underline{8 \cdot 5}$$

```
f();
g()
```

```
f() + g()
```

```
a = (++x) * (++y - x)
```

```
y += 1;
a = x*(y-x);
x += 1
```

Evaluacijska strategija:

- neučakana:

$$(x \mapsto x^2 + 3x)(3+8)$$

$$= (x \mapsto x^2 + 3x) \quad 11$$

$$= 11^2 + 3 \cdot 11$$

$$= 154$$

lena:

$$(x \mapsto x^2 + 3x)(3+8) =$$

$$(3+8)^2 + 3 \cdot (3+8) =$$

$$121 + 3 \cdot 11 =$$

$$154$$

$$(x \mapsto 5)\,(3+8)$$
$$= (x \mapsto 5)\ 11$$
$$= 5$$

$$(x \mapsto 5)\,(3+8)$$
$$5$$

Java: $f(g(5),\ 3+8)$ neučakana

najprej to

Haskell len

$$\mathrm{id} := \lambda x.\, x$$

$$(g \circ f)(x) := g(f(x))$$

$$\circ := (g \mapsto (f \mapsto (x \mapsto g(f\,x))))$$

$$\lambda g\, f\, x.\ g(f\,x)$$

$$\mathrm{const}_c(x) := c$$

$$\mathrm{const} := c \mapsto (x \mapsto c)$$

$$\lambda c\, x.\, c$$

$$(\lambda c\, x.\, c)\ 5 = \underbrace{\lambda x.\, 5}_{\text{konstantno } 5}$$

Boolove vrednosti in pogojni stavek:

$$\mathrm{false} := \lambda x\, y .\, y \quad \text{izberi drugi argument}$$
$$\mathrm{true} := \lambda x\, y .\, x \quad \text{izberi prvi argument}$$
$$\mathrm{if} := \lambda \underset{\text{ta izbira}}{p}\, x\, y .\, p\, x\, y$$

Želimo: $\mathrm{if}\ \mathrm{false}\ x\ y = y$

$\mathrm{if}\ \mathrm{true}\ x\ y = x$

Preverimo:

$$\mathrm{if}\ \mathrm{false}\ A\ B = (\lambda p\, x\, y .\, p\, x\, y)\ \mathrm{false}\ A\ B$$
$$= \mathrm{false}\ A\ B$$
$$= (\lambda x\, y .\, y)\ A\ B$$
$$= B$$

Urejeni pari:

(x, y)

fst: vrne prvo komponento

snd: -- drugo ....

$\mathrm{pair}\ x\ y$

$\mathrm{pair} = ?$

$\mathrm{fst} = ?$

$\mathrm{snd} = ?$

Želimo:

$\mathrm{fst}\,(\mathrm{pair}\ x\ y) = x$

$\mathrm{snd}\,(\mathrm{pair}\ x\ y) = y$

$$\mathrm{pair} = \lambda x\, y .\, \underbrace{\lambda f .\, f\, x\, y}$$

na urejeni par (x, y) gledamo kot operacijo "podaj x in y"

$$\mathrm{fst} = \lambda \underset{\text{urejeni par}}{u} .\, u\,(\lambda x\, y .\, x)$$

$$\mathrm{snd} = \lambda u \,.\, u\,(\lambda x y \,.\, y)$$

Števila

$$0 := \lambda f \,.\, \lambda x \,.\, x$$
$$1 := \lambda f \,.\, \lambda x \,.\, f\,x \quad = \quad \lambda . f . f$$
$$2 := \lambda f \,.\, \lambda x \,.\, f\,(f\,x)$$
$$3 := \lambda f \,.\, \lambda x \,.\, f\,(f\,(f\,x))$$
$$\vdots$$

Churchevo kodiranje števil

število n: $$n\,g\,x = \underbrace{g\,(g\,(\ldots g}_{n}\,x)\ldots))$$

$$3\,g\,x = g\,(g\,(g\,x))$$

$$\mathrm{plus} := \lambda m n \,.\, \lambda f x \,.\, \underbrace{f\,(f\,(f \ldots\ldots f}_{m+n}\,x)\ldots))$$

$$\underbrace{f\,(\ldots f}_{m}\,(\underbrace{f \ldots f}_{n}\,x)\ldots))$$

$$m\,f\,(\underbrace{f\,(f \ldots f}_{n}\,x)\ldots))$$

$$m\,f\,(n\,f\,x)$$

$$\mathrm{plus} := \lambda m n \,.\, \lambda f x \,.\, m\,f\,(n\,f\,x)$$

iszero 0 = true

iszero n = false   če n > 0

$$m \underbrace{(\lambda x.\,\text{false})}_{g} \underline{\underline{\text{true}}} = \underbrace{g(g(\cdots g}_{m}\ \text{true})\ldots)$$

m = 0 :   true

m > 0 : $\underset{(\lambda x.\text{false})}{g}$ (- - - - - - - -)

false

$(p_1, p_2) \mapsto (p_1 + 1,\ p_1)$

^n . second (n $\underbrace{\text{(\^{}p. pair (succ (first p)) (first p))}}_{f}$ $\underbrace{\text{(pair 0 0)}}_{x}$)

$$(0,0) \xmapsto{f} (1,0) \xmapsto{f} (2,1) \xmapsto{f} (3,2)$$

$$(0,0) \underbrace{\xmapsto{f} \cdots \xmapsto{f}}_{n} (n, n-1) \xmapsto[\text{second}]{} n-1$$

<= := ^m n . iszero (n pred m) ;

<= m n = iszero (n pred m)

"n-krat uporabi pred na m"

Dobimo: $\begin{cases} m - n & m \geq n \\ 0 & m < n \end{cases}$