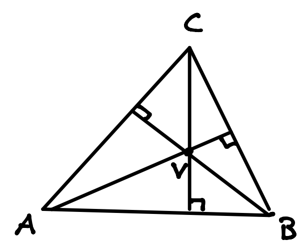
λ-račun

Funkcijski predpisi

Funkcija "f"

$$f(x) := x^2 + 3x + 5$$



Funkcijski predpis

$$x \mapsto x^2 + 3x + 5$$

Tudi

$$f := (x \mapsto x^2 + 3x + 5)$$

Funkcijo lahko uporabimo:

$$f(3)$$

$$(x \mapsto x^2 + 3x + 5)(3)$$

Računsko pravilo "β-redukcija":

V funkcijskem predpisu (vezano) spremenljivko nadomestimo z argumentom

$$(x \mapsto x^2 + 3 \cdot x + 5)(3) \longrightarrow$$

$$3^2 + 3 \cdot 3 + 5$$

Osnovne operacije:

- tvorimo funkcijski predpis: $x \mapsto E$
- uporabimo funkcijo na argumentu: $E_1(E_2)$

Računsko pravilo:

$$(x \mapsto E_1)(E_2) = \underbrace{E_1[E_2/x]}$$

"V izrazu E_1 zamenjaj x z izrazom E_2"
(substitucija)

Vezane in proste spremenljivke

$$\sum_{i=0}^{\infty} \frac{2^i}{a+1} \qquad \int \frac{ax^2+3}{1+x}\,dx$$

vezane
proste

```
for (int i=0; i<n; i++) {
    s += i;
}
```

$$\forall x \in \mathbb{R} . \exists y \in \mathbb{R} . x + y = z$$

$$x \longmapsto 3 \cdot x^2 + a \cdot x - b$$

Vezano spremenljivko lahko preimenujemo:

$$\sum_{i=1}^{n} i^2$$ "vsota kvadratov naravnih števil med 1 in n."

$$\sum_{i=1}^{m} i^2$$ "vsota kvadratov naravnih števil med 1 in m."

$$\sum_{j=1}^{n} j^2$$ "vsota kvadratov naravnih števil med 1 in n."

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(t)\,dt$$

$$\neq$$

$$\int_a^b g(x)\,dx$$

$$(x \mapsto 2x^2) = (y \mapsto 2y^2)$$

Pozor: ko vezano spremenljivko preimenujemo, se lahko proste spremenljivke ujamejo.

$x \mapsto a + x$ "prištej a"

$y \mapsto a + y$ "prištej a"

$a \mapsto a + a$ "podvoji"

a smo "ujeli"

Primer:

$$f(a) := \int_0^1 \sin(a\sqrt{x})\,dx$$

$$g(b) := \int_1^2 (x+b)^2\,dx$$

$$g(f(u^2+1)) = g\left(\int_0^1 \sin((u^2+1)\sqrt{x})\,dx\right)$$

$$= \int_1^2 \left(x + \left(\int_0^1 \sin((u^2+1)\sqrt{x})\,dx\right)\right)^2 dx$$

$$g(f(u^2+1)) = g\left(\int_0^1 \sin((u^2+1)\sqrt{z})\,dz\right)$$

$$= \int_1^2 \left(x + \left(\int_0^1 \sin((u^2+1)\sqrt{z})\,dz\right)\right)^2 dx$$

Gnezdeni funkcijski predpisi

$$X \mapsto E$$

↑ je lahko funkcijski predpis

Primer:

$$x \mapsto (y \mapsto x^2+y^3)$$

"simuliramo funkcijo večih spremenljivk"

sprejme: x

vrne: $y \mapsto x^2+y^3$

$$f := (x \mapsto (y \mapsto x^2 + y^3))$$

$$f(3)(4) =$$

$$((x \mapsto (y \mapsto x^2 + y^3))(3))(4) =$$

$$(y \mapsto 3^2 + y^3)(4) =$$

$$3^2 + 4^4$$

$$f(3) = (y \mapsto 3^2 + y^3)$$

λ-račun

Russell: $\iota x . \varphi(x)$ "tisti x, za katerega velja φ"

$\iota x . (x \in \mathbb{R} \land x > 0 \land x^2 = 2)$

Hilbert: $\varepsilon x . \varphi(x)$ "katerikoli x, ki zadošča φ"

$\varepsilon x . (x \in \mathbb{R} \land x^2 = 2)$

V stilu: $\forall x . \varphi(x)$

$\exists x . \varphi(x)$

Church: $\lambda x . E$ zapis λ

$x \mapsto E$ λ-abstrakcija

* Python: `lambda x: x**2 + 3*x + 7`
* Haskell: `\x -> x**2 + 3*x + 7`
* OCaml: `fun x -> x*x + 3*x + 7`
* Racket: `(lambda (x) (+ (* x x) (* 3 x) 7))`
* Mathematica: `#² + 3*# + 7 &` ali `Function[x, x² + 3*x + 7]`

$\lambda x.\, x^2+3x+7$

$x \mapsto x^2+3x+7$

λ-račun

$\lambda x. E$ abstrakcija $\quad x \mapsto E$

$E_1\, E_2$ aplikacija $\quad E_1(E_2)$ $\quad f(x)$

$A x$

$\frac{d}{dx} f$

Dogovor: aplikacija je levo asociativna:

$E_1 E_2 E_3 = (E_1 E_2) E_3$

$f\ a\ b = (f\ a)\ b$ $\quad$ f uporabimo zaporedoma na a in b

$g\ \underbrace{(a\ b)}_{\text{uporabi } a \text{ na } b}$ $\quad$ g uporabimo na $(a\ b)$

t.j.: $g(a(b))$

λ seže do konca, kolikor more:

$\lambda x.\, x\,(\lambda y.\, y\, y\, x)\, z\, u \quad =$

$\lambda x.\, (x\,(\lambda y.\, (y\, y\, x))\, z\, u)$

$\lambda x.\, x\, a\, b \quad \neq \quad (\lambda x.\, x\, a)\, b$

$x \mapsto (x(a))(b) \qquad (x \mapsto x(a))(b)$

β-redukcija

$$(\lambda x. E_1) E_2 = \underbrace{E_1[E_2/x]}_{}$$

v E_1 zamenjaj x z E_2
(in pazi, da ne ujameš prostih spremenljivk)

Okrajšave:

$$\lambda x. \lambda y. \lambda z. E \quad \ldots\ldots \quad \lambda x\, y\, z . E$$

$$x \mapsto (y \mapsto (z \mapsto E)) \quad \ldots\ldots \quad x \mapsto y \mapsto z \mapsto E$$

$$\cancel{(x, y, z) \mapsto E}$$

Kako računamo v λ-računu?

Primer:

$\lambda x . x$ identiteta

$$\underbrace{(\lambda x . x)(\underbrace{(\lambda y . y) a}_{\text{redex}})}_{\text{redex}}$$

$$(1) = (\lambda x . x)(a) = a$$

$$(2) = (\lambda y . y) a = a$$

Normalna oblika: ni več nobenega redeksa, vse je do konca izračunano

Strategija za računanje: v kakšnem vrstnem redu delamo β-redukcije.

LENA EVALUACIJA

$$
\begin{aligned}
& E_1 E_2 \\
& = (\lambda x. E_1')E_2 \\
& = E_1'[E_2/x]
\end{aligned}
$$

računamo samo E_1, da dobimo abstrakcijo:

$$E_1 \to \cdots \to \lambda x. E_1'$$

NEUČAKANA EVALUCIJA

$$
\begin{aligned}
& E_1 E_2 \\
& = (\lambda x. E_1')\, E_2' \\
& = E_1'[E_2'/x]
\end{aligned}
$$

računamo naprej

najprej do konca izračunamo E_1 in E_2:

$$E_1 \to \cdots \to \lambda x. E_1'$$

$$E_2 \to \cdots \to E_2'$$

V programskem jeziku:

$$f(\underbrace{3 + \sin(g(16))})$$

Konfluentnost:

Vrstni red računanja ni pomemben:

$$
\begin{tikzcd}
 & E_1 \arrow[dr] & \\
E \arrow[ur] \arrow[dr] & & E' \\
 & E_2 \arrow[ur] &
\end{tikzcd}
$$

vsi načini računanja so združljivi

Primer:

$$
\begin{tikzcd}[column sep=tiny]
& f\,((\underbrace{\lambda x.g\,x\,x}_{})\underbrace{(h\,a)}_{})\;((\underbrace{\lambda y.y}_{})\underbrace{(h\,b)}_{}) \arrow[dl] \arrow[dr] & \\
f\,(g\,(h\,a)(h\,a))\,((\underbrace{\lambda y.y}_{})\underbrace{(h\,b)}_{}) \arrow[dr] & & f\,((\underbrace{\lambda x.g\,x\,x}_{})\underbrace{(h\,a)}_{})\,(h\,b) \arrow[dl] \\
& f\,(g\,(h\,a)(h\,a))\,(h\,b) &
\end{tikzcd}
$$

Programiramo

$$(f \circ g)(x) = f(g(x))$$

$$f \circ g = \lambda x. f(g(x))$$

$$\text{Compose } f\ g = \ldots\,.$$

$$\text{Compose} = \lambda f.\lambda g.\lambda x.f(g x)$$

$$\circ = \lambda f.\lambda g.\lambda x.f(g x)$$

$$\text{Konst}_a(x) = a$$

$$\text{konst}_a = \lambda x.a$$

$$\text{konst} = \lambda a.\lambda x.a$$

$f_x(y)$ $\quad \int \Sigma \frac{\partial}{\partial x}$

$f^{(n)}$

Boolove vrednosti in pogojni stavek

<u>Iščemo</u>: false true if

da velja: if false X Y = Y

if true X Y = X

$$false = \lambda x y . y$$

$$true = \lambda x y . x$$

$$if = \lambda u . u$$

$$\begin{aligned}(if\ false) X Y &= false\ X Y \\ &= (\lambda x y . y) X Y \\ &= (\lambda y . y) Y \\ &= Y\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(if\ true) X Y &= true\ X Y \\ &= (\lambda x y . x) X Y \\ &= X\end{aligned}$$

Konjunkcija: iščemo and, da velja

and true X = X

and false X = false

$$\text{and} = \lambda p\, q.\ \text{if } p\ q\ \text{false}$$

<u>Urejeni pari:</u> (a, b) $\qquad \pi_1(a,b) = a$, $\pi_2(a,b) = b$

<u>Iščemo:</u> pair, fst, snd:

$$\text{fst}(\text{pair } X\ Y) = X$$
$$\text{snd}(\text{pair } X\ Y) = Y$$

$$\text{pair} = \lambda x\, y.\ \lambda p.\ p\ x\ y$$
$$\text{fst} = \lambda u.\ u\ \text{true}$$
$$\text{snd} = \lambda u.\ u\ \text{false}$$

Anekdota:

$$\hat{x}.\ \phi(x)$$
$$\hat{}x.\ \phi(x)$$
$$\lambda x.\ \phi(x)$$

<u>Števila:</u> |||| $\qquad$ |||| $\quad$ | $\quad$ $\overset{\times}{|}$|||

$$3 := \lambda f\, x.\ f\,(f\,(f\ x))$$
$$4 := \lambda f\, x.\ f\,(f\,(f\,(f\ x)))$$

||||

aritmetika:

$$n\, f\, x = \underbrace{f(f(\cdots f}_{n}\, x)$$

$$\text{succ } n = \lambda f\, x.\, f\,(n\, f\, x)$$

$$\text{succ} = \lambda n\, f\, x.\, f\,(n\, f\, x)$$

$$\text{iszero } 0 = \text{true}$$

$$\text{iszero } n = \text{false} \quad \text{za } n > 0$$

$$f = \lambda x.\,\text{false}$$

$$\underbrace{f(f(f \ldots (f}_{n}\ \text{true})\ldots)$$

Predhodnik:

pred := ^n . second (n (^p. pair (succ (first p)) (first p)) (pair 0 0))

$$\lambda n.\ \text{let } (a,b) = n\, \underbrace{(\lambda (p_1,p_2).\,(\text{succ } p_1, p_1))}_{f}\,(0,0)$$
$$\text{in } b$$

$$f(p_1,p_2) = (\text{succ } p_1, p_1)$$

$$f(p_1,p_2) \to (p_1+1,\ p_1)$$

$$3\ f\ (0,0) =$$
$$f(f(f(0,0))) =$$
$$f(f(1,0)) =$$
$$f((2,1)) =$$
$$(3,2) \xrightarrow{\text{snd}} 2$$