λ - račun

Funkcijski predpis

$$x \mapsto x^2+3$$

"x se sliku v x^2+3"

$f : A \to B$

f je funkcija iz A v B

$f : x \mapsto \ldots\ldots$

f slika x v $\ldots$

$f(x) := x^2+3$ ← okrajšava za tega

$f := (x \mapsto x^2+3)$ ← osnova

$f(3) = 3^2+3 = 12$

$(x \mapsto x^2+3)(3) = 3^2+3 = 12$

$\cancel{(3+7)}\cdot 8$

$a := 3+7$

$a \cdot 8$

$\cancel{(x \mapsto x^2+3)(3)}$

$f(x) = x^2+3$

$f(3)$

1. Predpis: $x \mapsto e$ "x se slika v e"
2. Uporaba (aplikacija): $(x \mapsto e_1)(e_2)$ "uporabi predpis $x \mapsto e_1$ na argumentu e_2"
3. Računsko pravilo (β-redukcija):

$$(x \mapsto e_1)(e_2) = \underbrace{e_1[x \leftarrow e_2]}_{\text{v } e_1 \text{ zamenjaj } x \text{ z } e_2}$$

SUBSTITUCIJA ali ZAMENJAVA

Primer:

$$(x \mapsto 2x+7)(3+8) = 2(3+8)+7$$

x smo zamenjali v $2x+7$ z $3+8$.

Vezane in proste spremenljivke

VEZANA V ZANKI FOR

```
for (i = 0; i < 10; i++) { s += i; }
```

PROSTA SPREMENLJIVKA

```
for (j = 0; j < 10; j++) { s += j; }

for (banana = 0; banana < 10; banana++) { s += banana; }

for (s = 0; s < 10; s++) { s += s; }
```

S SMO "UJELI" Z VEZAVO V ZANKI

```
for (i = 0; i < 10; i++) { t += i; }
```

Primeri:

PROSTA

vezana

$$\int_a^b \frac{1 + cx}{1 + cx^3}\,dx \qquad \int_a^b \frac{1 + ct}{1 + ct^3}\,dt$$

$$\int_a^d \frac{1 + cx}{1 + cx^3}\,dx \qquad \int_a^b \frac{1 + ex}{1 + ex^3}\,dx$$

$$\sum_{i=0}^{n} a \cdot r^{i} = a \cdot \frac{1 - r^{n+1}}{1 - r} = \sum_{\sin = 0}^{n} a \cdot r^{\sin}$$

vezana

$$\int_0^{\pi/2} \cos(\sin)\, d\sin$$

for(while = 0; while < 10; while++) { s += while; }

slaba ideja

$$x \mapsto a x^2 + 3$$

vezana prosta konstanta

Gnezdimo predpise:

$$x \mapsto (y \mapsto ax^2 + by - 1)$$

"x se slika v funkcijo, ki sprejme y in vrne ax^2+by-1"

$$u \mapsto ((x \mapsto x^2 + 3u)(17))$$

$$u \mapsto 17^2 + 3u$$

$$u \mapsto 289 + 3u$$

RAZLIČNI PREDPISI, KI DOLOČAJO ISTO FUNKCIJO

$$3 \cdot (7+8)$$

$$3 \cdot 15$$

$$45$$

RAZLIČNI ARITMETIČNI IZRAZI, KI DOLOČAJO ISTO ŠTEVILO

Primer med odmorom:

$$ax^2 + by - 1$$

VEZANE:
PROSTE: x, y, a, b

$$y \mapsto ax^2 + by - 1$$

VEZANE: y
PROSTE: x, a, b

$$x \mapsto (y \mapsto ax^2 + by - 1)$$

VEZANE: x, y
PROSTE: a, b

```
for (int i = 0; i < 10; i++) {
   s += i ;
   for (int i = 0; i < 20; i++) {
      t += i * i;
   }
}
```

i prekrije (shadow) i v notranji zanki

$$x \mapsto (3x + (x \mapsto 2x+1)(x+3))$$

$$x \mapsto (3x + (\ell \mapsto 2\ell+1)(x+3))$$

λ-račun

Namesto

$$x \mapsto e \qquad x \text{ se slika v } e$$

uporabimo

$$\lambda x . e \qquad x \text{ se slika v } e$$

Alonzo Church 1930

Programski jezik:

~~števila~~	$\boxed{\text{funkcije}}$
~~true~~, ~~false~~	~~zanke~~ ~~while~~, ~~for~~
~~tabele~~	~~if~~-~~then~~-~~else~~
~~objekte~~	~~rekurzija~~
~~stringi~~	~~tipi~~

Sintaksa λ-računa:

- funkcijski predpis, abstrakcija:

$$\lambda x.\, e$$

"v izrazu e smo abstrahiramo x"

- uporaba ali aplikacija:

$$e_1(e_2) \qquad f(a)$$

$$e_1\ e_2 \qquad f\ a$$

"e_1 uporabimo na e_2"

$\sin \alpha$

$A x$

Aplikacija je levo asociativna

$$e_1\ e_2\ e_3 = (e_1\ e_2)\ e_3$$

λ veže do konca:

$$\lambda x.\, e_1\ e_2\ e_3 = \cancel{(\lambda x.\, e_1)\ e_2}\ e_3$$

$$\cancel{(\lambda x.\, (e_1\ e_2))}\ e_3$$

$$\underline{\lambda x.\, (e_1\ e_2\ e_3)} \quad ?$$

$$\lambda x.\, f\ x\ y\ (\lambda z.\, z z) = \lambda x.\, (f\ x\ y\ (\lambda z.\, (z\ z)))$$

$$x \mapsto ((f(x))(y))(z \mapsto z(z))$$

$$x \mapsto (f\ x\ y\ (z \mapsto z\ z))$$

$$\hat{x} \qquad {}^\wedge x \qquad \lambda x$$

Računsko pravilo (β-redukcija):

$$(\lambda x . e_1)\, e_2 \rightsquigarrow e_1[x \leftarrow e_2]$$

$$\lambda x . (\lambda y . (\lambda f . f\,(f\,x)\,y))$$

okrajšamo

$$\lambda x\, y\, f .\ f\,(f\,x)\,y$$

Funkcijski predpis sprejme <u>en</u> argument:

$$\lambda x . e$$

Kako naredimo funkcijo, ki sprejme <u>dva</u> (ali več) argumentov?

1. Namesto "funkcija sprejme dva argumenta"
   "funkcija sprejme en argument, ki je urejeni par"

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \qquad f : \underbrace{\mathbb{R} \times \mathbb{R}} \to \mathbb{R}$$

2. "f sprejme x in y" predelamo v

   "f sprejme x in vrne funkcijo, ki sprejme še y"

<u>Primer</u>:

$$f(x,y) := x^2 + y^3 - 7$$

dva argumenta x, y

druga komponenta

$$f(p) := (\pi_1 p)^2 + (\pi_2 p)^3 - 7$$

urejeni par

prva komponenta p

$$f(x) := (y \mapsto x^2 + y^3 - 7)$$

$$f := (x \mapsto (y \mapsto x^2 + y^3 - 7))$$

$$f := \lambda x . \lambda y . x^2 + y^3 - 7$$
$$\lambda x\, y .\ x^2 + y^3 - 7$$

Namesto $e_1 + e_2$ piščemo plus $e_1\, e_2$ ....

Programiramo v λ-računu

Identiteta : $\lambda x . x$

Boolove vrednosti in pogojni stavek:

Namesto
if (p) { A } else { B }
piščemo if p A B

iščemo izraze

true , false , if

da velja: if true A B = A

if false A B = B

$$\text{true} := \lambda a\, b .\ a$$
$$\text{false} := \lambda a\, b .\ b$$
$$\text{if} := \lambda p\, a\, b .\ p\, a\, b$$

if true A B =

$(\lambda p\, a\, b .\ p\, a\, b)$ true A B =

$(\lambda a\, b .\ \text{true}\ a\ b)$ A B =

true A B =

$(\lambda a\, b . a)$ A B = $(\lambda b . A)$ B = A

Vaja: Preveri $\text{if false } A\ B = B$

Urejeni pari:

Iščemo

pair ~~first~~ ~~second~~

fst snd

da velja:

$$\text{fst}\ (\text{pair}\ u\ v) = u$$
$$\text{snd}\ (\text{pair}\ u\ v) = v$$

Matematika:

$(\ , \ )$ (u, v)

pair u v

$\pi_1 p$ prva komponenta fst p

$\pi_2 p$ druga komponenta snd p

$$\pi_1 (u, v) = u$$
$$\pi_2 (u, v) = v$$

$$\cancel{\text{pair} := \lambda u\, v.\ \lambda s.\ s\ u\ v}$$
$$\cancel{\text{fst} := \lambda x\, y.\ x}$$
$$\cancel{\text{snd} := \lambda x\, y.\ y}$$

$$\text{fst} := \lambda p.\ p\ (\lambda x\, y.\ x)$$
$$\text{snd} := \lambda p.\ p\ (\lambda x\, y.\ y)$$
$$\text{pair} := \lambda u\, v\, s.\ s\ u\ v$$

$$(\lambda p. p)\ \text{true}\ A\ B = \text{true}\ A\ B$$
$$= ((\lambda a\, b. a)\ A)\ B$$
$$= (\lambda b. A)\ B$$
$$= A$$

Števila:

$$0 = \lambda f x . x$$

$$1 = \lambda f x . f x$$

$$2 = \lambda f x . f (f x)$$

$$n = \lambda f x . \underbrace{f (f (\cdots f}_{n} x) \cdots))$$

Seštevanje : iščemo plus, da velja :

$$\text{plus } n\ m = \lambda f x . \underbrace{f(f(\cdots\cdots f}_{n+m} x)\cdots)$$

$$\text{plus} = \lambda n m . \lambda f x . \underbrace{n f \ \overbrace{(m f x)}^{\overbrace{f(f \cdots f}^{m} x)\cdots)}}_{\underbrace{f(\cdots\cdots f}_{n} (m f x)\cdots)}$$

$$\underbrace{f \cdots\cdots f}_{n} (\underbrace{f \cdots\cdots f}_{m} x)$$

Rekurzivna definicija :

$$\sigma = D(\sigma)$$

$$x = 2x + 3 \qquad (x = -3)$$

$$x = x + 7 \quad ??$$

Rekurzivna definicija:

$$x = f\,x$$

↳ funkcija

$$x = f\,x \qquad f = \lambda z.\,2z+3$$

Faktoriela: $\quad fact = \lambda n.\ \text{if } n=0 \text{ then } 1 \text{ else } n\cdot fact(n-1)$

$$fact = F\ fact \quad \text{kjer je}$$

$$F = \lambda f.\,\lambda n.\ \text{if } n=0 \text{ then } 1 \text{ else } n\cdot f(n-1)$$

Iščemo program fix, da velja

$$fix\ \underline{F} = F\,(fix\,F)$$

$$fix = \lambda f.\ (\lambda x.\,f(x\,x))(\lambda x.\,f(x\,x))$$

$$\begin{aligned}
fix\ F &= (\lambda x'.\,F(x'x'))(\lambda x.\,F(x\,x)) \\
&= F(\underbrace{(\lambda x.\,F(x\,x))(\lambda x.\,F(x\,x))}_{fix\ F}) \\
&= F\,(fix\ F) = F\,(F(fix\ F)) \\
& = F\,(F\,(F\,(fix\ F)))
\end{aligned}$$