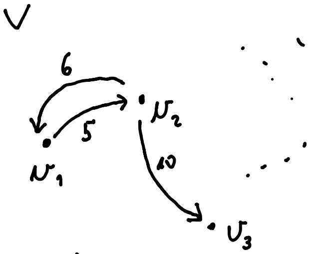
Dijkstrov algoritem

<u>Usmerjen graf G:</u>

množica vozlišč $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$

množica povezav $E \subseteq V \times V$



$(v_i, v_j) \in E$ od v_i do v_j vodi povezava

$$\ell(v_i v_j) = \text{dolžina povezave } (v_i, v_j)$$
$$= \infty \quad \text{če } (v_i, v_j) \notin E$$

Predstavitev G v prog. jeziku:

1) Matrika sosednosti

$$\underset{n \times n}{A} = \begin{bmatrix} 0 & & & \\ & 0 & \cdots & a_{i,j} \\ & & \ddots & \\ & & & 0 \end{bmatrix} \qquad a_{i,j} = \ell(v_i v_j)$$

2) Slovar (seznamov) sosedov:

$\{ \; v_1 : [(v_{i_1}, \ell(v_1 v_{i_1})), \dots (v_k, \ell(v_1 v_k)), \dots],$

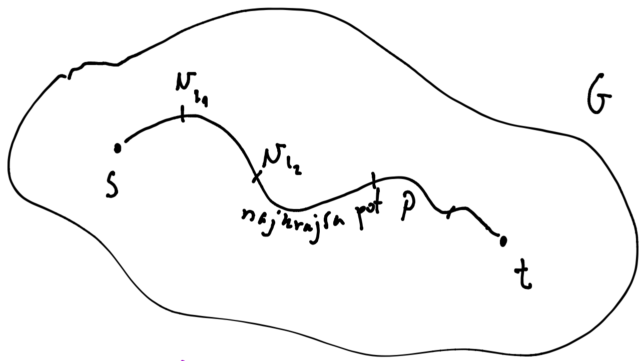
$\quad v_2 : [\dots]$

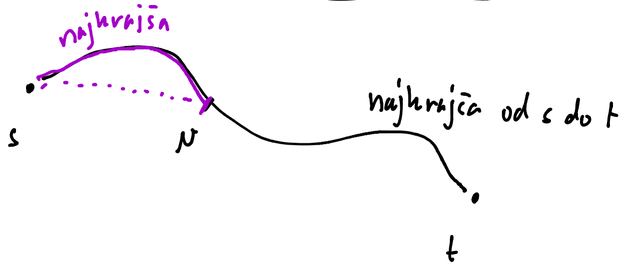
$\quad v_i : [\quad]$ ← seznam sosedov v_i skupaj z dolžinami povezav

$\quad \vdots$

$\}$

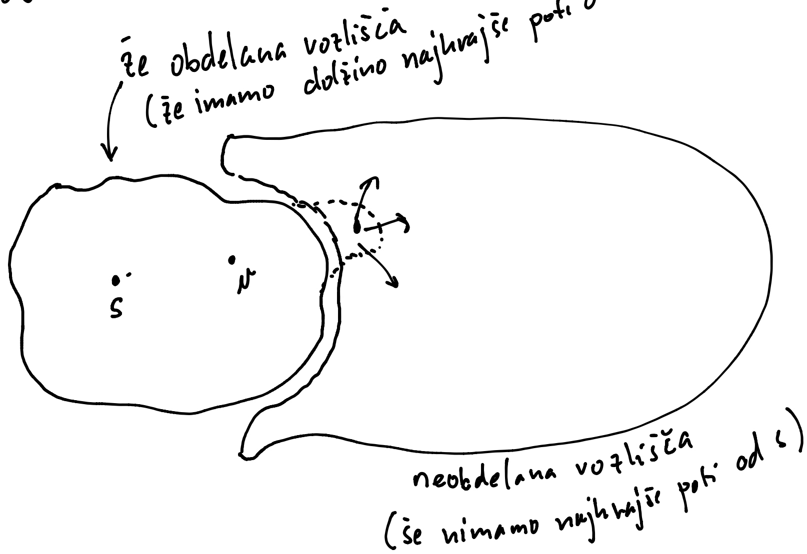
Naloga: Poišči najkrajšo pot med vozliščema s in t v grafu G.





Ideja:

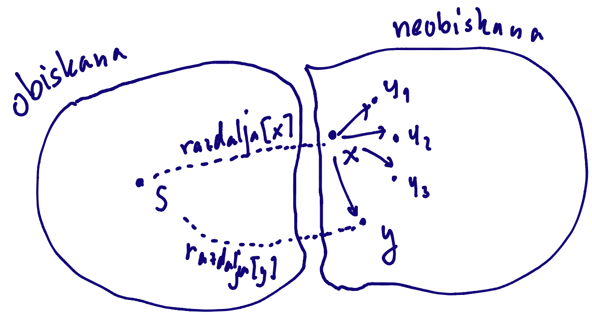
- poiščemo dolžine najkrajših poti od s do vseh ostalih vozlišč



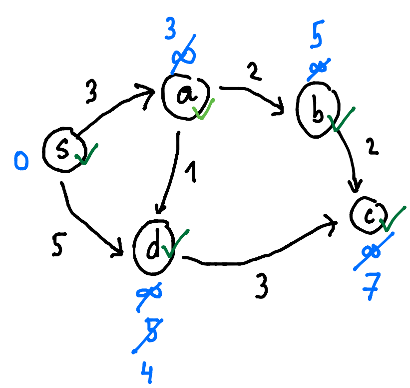
```
funkcija Dijsktra(graf, s):
    za vsako vozlišče x:
        razdalja[x] <— ∞
    razdalja[s] <— 0

    dokler ne obiščemo vseh vozlišč:
        x <— neobiskano vozlišče s trenutno najmanjšo razdaljo
        za vsakega soseda y vozlišča x, ki ga še nismo obiskali:
            do_y_skozi_x <— razdalja[x] + povezava(x, y)
            če do_y_skozi_x < razdalja[y]:
                razdalja[y] <— do_y_skozi_x
        vozlišče x označimo kot obiskano
    vrni razdalja
```

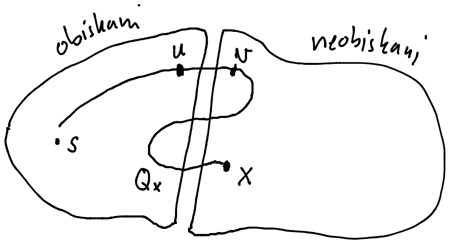
razdalja[x] = do sedaj najkrajša videna pot od s do x
(na koncu: dolžine najkrajših poti od s do x-ov



Primer:



Zakaj postopek deluje?



Oznake:

- Q_v najkrajša pot od s do v
- $\ell(u,v)$ dolžina povezave $u \to v$
- razdalja[v] do sedaj najboljša videna razdalja
- $d(P)$ dolžina poti P

Trdimo:

Za vsak $v \in$ obiskani, je razdalja$[v] = d(Q_v)$, že ima optimalno vrednost

- na začetku so vsi neobiskani → trditev drži
- dokazujemo z indukcijo:

  Naslednji, ki ga dodamo med obiskane naj bo x

razdalja$[x] \le$ razdalja$[v]$

$$\text{razdalja}(v) \le \text{razdalja}[u] + \ell(u,v) \le d(Q_u) + \ell(u,v) = d(Q_v) \le d(Q_x) \le \text{razdalja}[x]$$

$$\text{razdalja}[x] \le \text{razdalja}[v]$$

Ker smo u že obdelali, smo že poskrbeli, da velja:

razdalja$[v] \le$ razdalja$[u] + \ell(u,v)$

Ponovimo:

razdalja(v) $\le$ ker smo u že obdelali

razdalja(u) + $\ell(u,v)$ $\le$ ker je u že obiskan, po IH torej že velja razdalja$[u] = d(Q_u)$

$d(Q_u) + \ell(u,v)$ $\le$ ker je podpot najkrajše poti spet najkrajša

$d(Q_v)$ $\le$ ker je Q_v vsebovana v Q_x

$d(Q_x)$ $\le$

razdalja $[x]$ $\le$ ker je x tisti od neobiskanih, ki ima najmanjšo razdalja[x]

razdalja $[v]$

Sklep: razdalja$[x] = d(Q_x)$

Časovna zahtevnost:

$$G = (V, E)$$

$|V| = n$ vozlišč

$|E| = m$ število povezav

Knjigovodstvo:

$$n + n + \Big(n-1 + |\text{sosedi od } x| + n-2 + |\text{sosedi od } x'| + n-3 + |\text{sosedi od } x''| + \dots + 1 \Big)$$

$$= 2n + (1 + 2 + \dots + n-1) + \sum_{x \in V} |\text{sosedi } x|$$

$$= 2n + \frac{1}{2}(n-1)n + m$$

$$\in O(n^2 + m) \qquad m \leq n(n-1) \leq n^2$$

$$= O(|V|^2 + |E|)$$