Urejanje z zlivanjem

Podnaloga:

vhod: urejeni tabeli a in b

$a = [1, 3, 5, 6, 20, 21]$ velikost m

$b = [4, 15, 16, 19, 30]$ velikost n

naloga: tabeli združi v novo urejeno tabelo

t.j. $[1, 3, 4, 5, 6, 15, 16, 19, 20, 21, 30]$ velikost $m+n$

Algoritem:

1. Naredimo novo tabelo velikosti $m+n$
2. Tabelo napolnimo od elementa 0 do $m+n-1$. Kako?

a: $[1, 3, \underset{\substack{\uparrow \\ i=2}}{5}, 6, 20, 21]$ b: $[4, \underset{\substack{\uparrow \\ j=1}}{15}, 16, 19, 30]$

c: $[1, 3, 4, \underset{\substack{\uparrow \\ i+j}}{\_\_}, \quad]$

Časovna zahtevnost zlivanja $O(\underset{\substack{\uparrow \\ \text{dolžina } a}}{m} + \underset{\substack{\uparrow \\ \text{dolžina } b}}{n})$

Urejanje z zlivanjem:

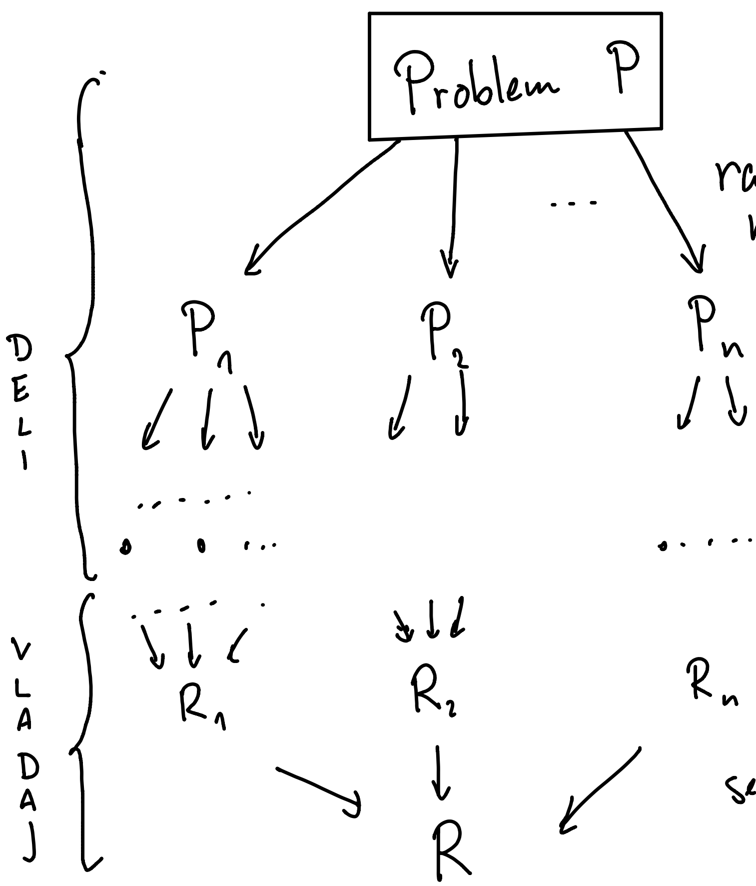
[3, 1, 5, 8, 7 ⋮ 4, 10, 9, 7, 6]

$\Downarrow$ $\Downarrow$ uredimo vsako od polovic

[1, 3, 5, 7, 8] ⋮ [4, 6, 7, 9, 10]

če sta leva in desna polovica že urejeni, ju lahko zlijemo.

Algoritmi "deli & vladaj"



razdelimo na manjše podprobleme
istega tipa kot P

delimo naprej

osnovni, nedeljivi problemi
rešimo neposredno

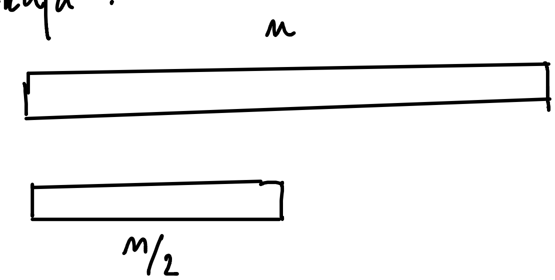
rešitve podproblemov

sestavimo rešitve

Primeri:

1. Urejanje z zlivanjem:
   - delimo: na dva podproblema polovične velikosti
   - vladamo: zlivanje

2. Bisekcija:



a tabela
iščemo indeks x

- deli: en podproblem polovične velikosti
- vladaj: ni treba delati ničesar

Časovna zahtevnost:

- problem delimo na k podproblemov
- podproblemi so velikosti $\alpha \cdot n$, kjer je n velikost celotnega problem, $0 \leq \alpha < 1$.

  [Primer: urejanje z zlivanjem $k = 2$, $\alpha = \frac{1}{2}$]

- Faza "deli" ima $f(n)$ korakov [primer zlivanja: $f(n) = n$]
- Faza "vladaj" ima $g(n)$ korakov [primer ur. z. zliv: $g(n) = n$]

$T(n)$ = število korakov za reševanje problema velikosti n

$$T(1) = 1$$

$$T(n) = \underbrace{f(n)}_{\text{deli}} + \underbrace{k \cdot T(\alpha \cdot n)}_{\substack{\text{rekurzivno rešimo} \\ k \text{ podproblemov} \\ \text{velikosti } \alpha \cdot n}} + \underbrace{g(n)}_{\text{vladaj}}$$

Poenostavimo: $h(n) := f(n) + g(n)$

$$T(n) = h(n) + k \cdot T(\alpha \cdot n)$$

$$T(n) = h(n) + k \cdot \left(h(\alpha n) + k \cdot T(\alpha^2 n) \right) =$$

$$= h(n) + k \cdot h(\alpha \cdot n) + k^2 \cdot T(\alpha^2 n) =$$

$$= h(n) + k \cdot h(\alpha \cdot n) + k^2 \left(h(\alpha^2 n) + k \cdot T(\alpha^3 n) \right) =$$

$$= h(n) + k \cdot h(\alpha n) + k^2 h(\alpha^2 n) + k^3 T(\alpha^3 n)) =$$

... po j korakih ....

$$= \sum_{i=0}^{j-1} k^i \cdot h(\alpha^i n) + k^j T(\alpha^j n)$$

Končamo, ko je $\alpha^j n = 1$

$$\alpha^j = \frac{1}{n}$$

$$j = \log_\alpha \frac{1}{n}$$

$$j = -\log_\alpha n$$

$$j = \log_{(1/\alpha)} n$$

$$= \sum_{i=0}^{\log_{1/\alpha} n - 1} k^i \cdot h(\alpha^i n) + k^{\log_{1/\alpha} n} \cdot 1$$

$$\approx \sum_{i=0}^{\log_{1/\alpha} n} k^i \, h(\alpha^i \cdot n)$$

Neuporaben odgovor:

$$T(n) = \sum_{i=0}^{\log_{1/\alpha} n} k^i \, h(\alpha^i \cdot n)$$

Primeri:

① Urejanje z zlivanjem: $k = 2$, $\alpha = \frac{1}{2}$, $h(n) = n$

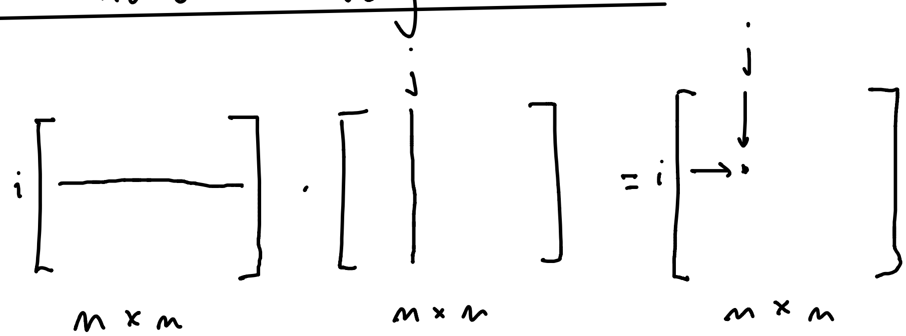
$$T(n) = \sum_{i=0}^{\log_2 n} \cancel{2^i} \cdot \cancel{\left(\tfrac{1}{2}\right)^i} \cdot n = \sum_{i=0}^{\log_2 n} n = n \cdot \log_2 n$$

Urejanje z zlivanjem je $O(n \cdot \log_2 n)$

② Bisekcija: $k = 1$, $\alpha = \frac{1}{2}$, $h(n) = 1$

$$T(n) = \sum_{i=0}^{\log_2 n} 1^i \cdot 1 = \log_2 n \quad \checkmark$$

Strassenovo množenje matrik



Množenje matrik : $O(n^3)$ kjer je dimenzija $n \times n$

ker je treba narediti n množenj za vsakega od n^2 elementov matrike

$$\left[\begin{array}{c|c} A_1 & A_2 \\ \hline A_3 & A_4 \end{array}\right] \cdot \left[\begin{array}{c|c} B_1 & B_2 \\ \hline B_3 & B_4 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|c} C_1 & C_2 \\ \hline C_3 & C_4 \end{array}\right]$$ množimo bločno

Deli in vladaj : $\alpha = \frac{1}{4}$ (premisli, zakaj ne $\alpha = \frac{1}{2}$)

$k = 8$

Dobimo $O(n^3)$.

Strassen: samo 7 rekurzivnih klicev

$\Rightarrow O(n^{2.8074})$