

# Naloga 5.33 (prijava a in d)

Kateri od spodnjih preslikav  $\mathcal{P}(A) \rightarrow \mathcal{P}(A)$  so monotone glede na  $\subseteq$  za vse  $f: A \rightarrow A$  in  $S, T \subseteq A$ .

$$(a) X \mapsto f_*(X \setminus f_*(S \setminus T))$$

$$(d) X \mapsto f^*(S \setminus f^*(X \setminus T))$$

Rešitev:

Preslikava (a) je kompozicijska preslikava:

- $f_* : \mathcal{P}(A) \rightarrow \mathcal{P}(A)$
- $f^* : \mathcal{P}(A) \rightarrow \mathcal{P}(A)$
- $\setminus : \mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(A) \rightarrow \mathcal{P}(A)$  različna množic

Za ugotavljanje monotonosti in antimonotonosti je treba najprej vedeti, kako je z (anti)monotonostjo teh treh preslikav:

1.  $f_*$  je monotona:  $X \subseteq Y \Rightarrow f_*(X) \subseteq f_*(Y)$
2.  $f^*$  je monotona:  $X \subseteq Y \Rightarrow f^*(X) \subseteq f^*(Y)$
3.  $(X, Y) \mapsto X \setminus Y$  je monotona v prvem in antimonotona v drugem argumentu:
 
$$X_1 \subseteq X_2 \rightarrow X_1 \setminus Y \subseteq X_2 \setminus Y$$

$$Y_1 \subseteq Y_2 \rightarrow X \setminus Y_1 \supseteq X \setminus Y_2$$

(Zgornja dejstva je treba dokazati, tega ni bilo na predavanjih in vajah.)

Sedaj lahko rešimo (a)  $X \mapsto f_*(X \setminus f_*(S \setminus T))$   
 tako, da začnemo z  $X \subseteq Y$  in gredimo rezultat:

$$X \subseteq Y \xRightarrow{\text{monotonost } \setminus \text{ v prvem arg.}} X \setminus f_*(S \setminus T) \subseteq Y \setminus f_*(S \setminus T) \xRightarrow{\text{monotonost } f_*} f_*(X \setminus f_*(S \setminus T)) \subseteq f_*(Y \setminus f_*(S \setminus T))$$

Odgovor: (a) je monotona.

<sup>v</sup>  
Se primer (d):  $X \mapsto f^*(S \setminus f^*(X \setminus T))$

$$X \subseteq Y$$

$$X \setminus T \subseteq Y \setminus T$$

$$f^*(X \setminus T) \subseteq f^*(Y \setminus T)$$

$$S \setminus f^*(X \setminus T) \supseteq S \setminus f^*(Y \setminus T)$$

$$f^*(S \setminus f^*(X \setminus T)) \supseteq f^*(S \setminus f^*(Y \setminus T))$$

$\Rightarrow$  monotnost 1. v. 1. ug.

$\Rightarrow$  monotnost  $f^*$

$\Rightarrow$  antimonotnost 1. v. 2. ug.

$\Rightarrow$  monotnost  $f^*$

Odgovor: (d) je antimonotna.