# Naloga 2

Naj bo $S = \{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid x - y \in \mathbb{Z}\}$.

a) Dokažite, da je $S$ ekvivalenčna relacija.

b) Dokažite, da je $\mathbb{R}/S$ neštevna.

## Rešitev:

(a) • refleksivnost $S$:

$$x S x \iff x - x \in \mathbb{Z} \iff 0 \in \mathbb{Z} \iff T$$

• simetričnost $S$:

$$x S y \iff x - y \in \mathbb{Z}$$
$$\iff y - x \in \mathbb{Z} \iff y S x$$

• tranzitivnost $S$:

Denimo, da je $x S y$ in $y S z$.

Torej $x - y \in \mathbb{Z}$ in $y - z \in \mathbb{Z}$

Torej $x - z = x - y + y - z =$

$$= \underset{\mathbb{Z}}{\underset{\cap}{(x-y)}} + \underset{\mathbb{Z}}{\underset{\cap}{(y-z)}} \in \mathbb{Z}.$$

(b) Ekvivalenčni razred $x \in \mathbb{R}$ je

$$[x]_S = \{ y \in \mathbb{R} \mid x - y \in \mathbb{Z} \}$$
$$= \{ x + k \mid k \in \mathbb{Z} \}$$

To je števna množica, ker velja

$$[x]_S \cong \mathbb{Z}$$
$$y \longmapsto y - x$$
$$x + k \longleftarrow k$$

$\mathbb{R}$ je unija ekvivalenčnih razredov:

$$\mathbb{R} = \bigcup (\mathbb{R}/S)$$

Če bi bila $\mathbb{R}/S$ števna, bi bil $\mathbb{R}$ števna unija števnih množic, torej števna. Vendar pa vemo, da je $\mathbb{R}$ neštevna.

# Naloga 4

Če je $f_*{}^{**}{}_*: P^4(A) \to P^4(B)$ injektivna, potem je tudi $f: A \to B$ injektivna.

<u>Rešitev:</u>

Lema 1: Če je $g_*: PX \to PY$ injektivna, je tudi $g: X \to Y$ injektivna.

Dokaz:

Denimo, da je $g_*$ injektivna in $g(x) = g(y)$. Dokazujemo $x = y$.

$$g_*(\{x\}) = \{g(x)\} = \{g(y)\} = g_*(\{y\})$$

$\Rightarrow \{x\} = \{y\}$ ker $g_*$ injektivna.

$\Rightarrow x = y$ $\blacksquare$

Lema 2: Če $g^*: PY \to PX$ injektivna, je
$g: X \to Y$ surjektivna.

Dokaz:

Naj bo $g^*$ injektivna in $y \in Y$.
Dokažemo

$$\exists x \in X . g(x) = y$$

To je ekvivalentno

$$\{x \in X \mid g(x) = y\} \neq \emptyset$$

$$\shortparallel$$

$$g^*(\{y\})$$

Dokažimo $g^*(\{y\}) \neq \emptyset$.
Denimo, da bi veljalo $g^*(\{y\}) = \emptyset$.
Potem bi imeli

$$g^*(\{y\}) = \emptyset = g^*(\emptyset)$$

$\Longrightarrow$ $\{y\} = \emptyset$ ker $g^*$ injektivna

protislovje.

$\square$

Lema 3: Če $g^*: PY \to PX$ surjektivna, je $g: X \to Y$ injektivna.

Dokaz:

Denimo $g^*$ surjektivna.

Dokazujemo $g$ injektivna.

Denimo
$$g(x) = g(y) \quad \text{za} \quad x, y \in X.$$

Dokazujemo $x = y$.

Ker je $g^*$ surjektivna, obstaja $S \subseteq Y$, da je
$$g^*(S) = \{x\}$$

Torej $x \in \{x\} = g^*(S)$ in $g(x) \in S$.

Torej
$$g(y) = g(x) \in S$$
$$y \in g^*(S) = \{x\}$$
$$\Rightarrow \quad x = y. \qquad \blacksquare$$

Sedaj rešimo nalogo:

${f_*}^{***}$ injektivna $\Rightarrow$ (Lema 1)

${f_*}^{**}$ injektivna $\Rightarrow$ (Lema 2)

${f_*}^{*}$ surjektivna $\Rightarrow$ (Lema 3)

$f_*$ injektivna $\Rightarrow$ (Lema 1) $\Rightarrow$ $f$ injektivna.