Logika in množice
1. kolokvij 29.11.2017 - rešitve

Naloga 1: $A^{1+B} \cong A^B \times A$

Definiramo preslikavi

$$f : A^{1+B} \longrightarrow A^B \times A$$
$$h \longmapsto (b \mapsto h(in_2(b)),\ h(in_1()))$$

$$g : A^B \times A \longrightarrow A^{1+B}$$
$$(k, a) \longmapsto \begin{pmatrix} in_1() \mapsto a \\ in_2(x) \mapsto k(x) \end{pmatrix}$$

Preverimo $g \circ f = id_{A^{1+B}}$:

$g(f(h)) =$

$g(b \mapsto h(in_2(b)),\ h(in_1())) =$

$$\begin{pmatrix} in_1() \mapsto h(in_1()) \\ in_2(x) \mapsto h(in_2(x)) \end{pmatrix} = (u \mapsto h(u)) = h \quad \checkmark$$

Preverimo $f \circ g = id_{A^B \times A}$

$f(g(k, a)) =$

$f\begin{pmatrix} in_1() \mapsto a \\ in_2(x) \mapsto k(x) \end{pmatrix} =$

$(b \mapsto k(b), a) =$

(k, a) ✓

Naloga 2: $(p \Leftrightarrow \neg q) \Leftrightarrow \neg(p \Leftrightarrow q)$ $(*)$

p	q	$p \Leftrightarrow \neg q$	$\neg(p \Leftrightarrow q)$	
$\perp$	$\perp$	$\perp$	$\perp$	$\top$
$\perp$	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$
$\top$	$\perp$	$\top$	$\top$	$\top$
$\top$	$\top$	$\perp$	$\perp$	$\top$

$(*)$ je tavtologija.

Naloga 3: Dokažite

$$((\exists x \in X .\, p(x)) \Rightarrow (\forall x \in X .\, q(x))) \Rightarrow \forall a, b \in X .\, p(a) \Rightarrow q(b)$$

Najprej preimenujemo vezane spremenljivke

$$((\exists x \in X .\, p(x)) \Rightarrow (\forall y \in X .\, q(y))) \Rightarrow \forall a, b \in X .\, p(a) \Rightarrow q(b)$$

Dokaz:

Predpostavimo

$$(\exists x \in X .\, p(x)) \Rightarrow (\forall y \in X .\, q(y)) \qquad (1)$$

Dokažimo $\forall a, b \in X .\, p(a) \Rightarrow q(b)$:

Naj bo $a \in X$.

Naj bo $b \in X$.

Predpostavimo $p(a)$. (2)

Dokažimo $q(b)$:

Iz (2) sledi

$$\exists x \in X .\, p(x) \qquad (3)$$

namreč $x := a$. Iz (1) in (3) sledi

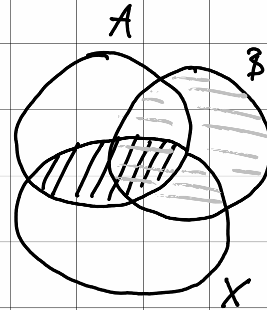
$$\forall y \in X .\, q(y) \qquad (4)$$

Uporabimo (4) na $y := b$ in dobimo

$$q(b)$$

$\blacksquare$

Naloga 4: $A, B, X \subseteq \mathcal{U}$.



Reši $\quad A \cap X = B \setminus X$

Rešitev:

$$A \cap X = B \setminus X$$

$$(A \cap X) \oplus (B \setminus X) = \emptyset$$

$$(A \cap X) \oplus (B \cap X^c) = \emptyset$$

$$\left[(A \cap X) \cap \underbrace{(B \cap X^c)^c}_{B^c \cup X}\right] \cup \left[\underbrace{(A \cap X)^c}_{A^c \cup X^c} \cap (B \cap X^c)\right] = \emptyset$$

$$(A \cap X \cap B^c) \cup \underbrace{(A \cap X \cap X)}_{A \cap X} \cup (A^c \cap B \cap X^c) \cup \underbrace{(X^c \cap B \cap X^c)}_{B \cap X^c} = \emptyset$$

$$\left[(\underbrace{(A \cap B^c) \cup A}_{A}) \cap X\right] \cup \left[(\underbrace{(A^c \cap B) \cup B}_{B}) \cap X^c\right] = \emptyset$$

$$(A \cap X) \cup (B \cap X^c) = \emptyset$$

$$B \subseteq X \subseteq A^c$$

Rešitev: $\quad B \subseteq X \subseteq A^c \quad$, pri pogoju $\quad B \subseteq A^c$

Naloga 5

Ali je vsaka podmnožica $\mathbb{N}$ omejena ali kokončna?

Odgovor: Ne.

Primer: Množica lihih števil
$$L = \{2n+1 \mid n \in \mathbb{N}\}$$

ni omejena in ni kokončna

1) L ni omejena, ker lahko za vsak $m \in \mathbb{N}$ najdemo liho število, večje od m — denimo $42m+1$.

2) L ni kokončna, ker je njen komplement množica sodih števil, ki je neskončna.