3. naloga (25 točk)

Naj bo A množica ter φ, ψ in ϑ predikati na A. Dokažite izjavo

$$\Big(\forall x \in A.\, \neg\big(\varphi(x) \Rightarrow \psi(x)\big)\Big) \Rightarrow \big(\exists y \in A.\, \varphi(y)\big) \vee \big(\forall z \in A.\, \vartheta(z)\big). \qquad (1)$$

Rešitev:

Dokažimo (1).

Predpostavimo $\forall x \in A.\, \neg(\varphi(x) \Rightarrow \psi(x))$. (2)

Dokažimo $\underline{(\exists y \in A.\, \varphi(y))} \vee \underline{(\forall z \in A.\, \vartheta(z))}$. (3)

$\neg(p \Rightarrow q) = \neg(\neg p \vee q) = p \wedge \neg q$

(2) je ekvivalentno $\forall x \in A.\, \varphi(x) \wedge \neg\psi(x)$. (2′)

Vemo $A = \emptyset$ ali $A \neq \emptyset$. Obravnavamo primera:

(i) Če $A = \emptyset$:

Potem velja $\underline{\forall z \in A.\, \vartheta(z)}$.

Torej velja (3).

(ii) Če $A \neq \emptyset$:

Torej vemo $\exists t \in A.\, \top$.

Torej imamo neki $t \in A$. (4)

Dokažimo $\underline{\exists y \in A.\, \varphi(y)}$:

Podamo $y := t$ in preverimo:

- $t \in A$ velja zaradi (4).
- Dokažimo $\varphi(t)$:

V (2′) vzamemo $x := t$ in dobimo

$\varphi(t) \wedge \neg\psi(t)$.

Od tod sledi $\varphi(t)$.

Torej velja (3). $\square$

4. naloga (25 točk)

Naj bo X množica. Za $\mathscr{A} \subseteq \mathcal{P}(X)$ rečemo:

- $\mathscr{A}$ je ***gornja množica***, kadar za vse $S, T \subseteq X$ velja: če $S \in \mathscr{A}$ in $S \subseteq T$, potem tudi $T \in \mathscr{A}$,
  u, V u u V V
- $\mathscr{A}$ je ***zaprta za vse preseke***, kadar za vsak $\mathscr{B} \subseteq \mathscr{A}$ velja $\bigcap \mathscr{B} \in \mathscr{A}$. (Pri tem kot običajno $\bigcap \mathscr{B}$ označuje množico $\{x \in X \mid \forall S \in \mathscr{B}.\, x \in S\}$.)

Označimo

$$\Phi := \{\mathscr{A} \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(X)) \mid \mathscr{A} \text{ je gornja množica in zaprta za vse preseke}\}.$$

Za vsak $S \subseteq X$ označimo še

$$\uparrow S := \{T \in \mathcal{P}(X) \mid S \subseteq T\} \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(X))$$

$M \in \uparrow S \Leftrightarrow S \subseteq M \subseteq X$

a) (10 točk) Dokažite, da za vsak $S \subseteq X$ velja $\uparrow S \in \Phi$.

b) (15 točk) Dokažite, da velja $\Phi \cong \mathcal{P}(X)$.

(a) Naj bo $S \subseteq X$.
Dokažimo

i) $\uparrow S$ gornja množica: $\forall U, V \subseteq X.\ U \in \uparrow S \wedge U \subseteq V \Rightarrow V \in \uparrow S$

$\Leftrightarrow \quad \forall U, V \subseteq X.\ S \subseteq U \wedge U \subseteq V \Rightarrow S \subseteq V$

Naj bo $U \subseteq X$.
Naj bo $V \subseteq X$.
Predp. $S \subseteq U$. (1)
Predp. $U \subseteq V$ (2)
Dokazujemo: $S \subseteq V$ očitno sledi iz (1) in (2).

ii) $\uparrow S$ je zaprta za preseke: $\forall \mathcal{B} \subseteq \uparrow S.\ \bigcap \mathcal{B} \in \uparrow S$

$\Leftrightarrow \quad \forall \mathcal{B} \subseteq \uparrow S.\ S \subseteq \bigcap \mathcal{B} \subseteq X$

Naj bo $\mathcal{B} \subseteq \uparrow S$. (3)
Dokazujemo $S \subseteq \bigcap \mathcal{B} \subseteq X$. Očitno $\bigcap \mathcal{B} \subseteq X$ po definiciji $\bigcap \mathcal{B}$.

Naj bo $x \in S$. (4) Dokazujemo $x \in \bigcap \mathcal{B}$.

$\Leftrightarrow \forall U \in \mathcal{B}.\ x \in U$.

Naj bo $U \in \mathcal{B}$. (5) Dokažimo $x \in U$:

(3) je ekvivalentno $\forall V \in \mathcal{B}.\ V \in \uparrow S$

$\Leftrightarrow \forall V \in \mathcal{B}.\ S \subseteq V$ (3')

Torej iz (3') in (5) sledi $S \subseteq U$. (6)

Iz (4) in (6) sledi $x \in U$

(b) $\Phi \cong \mathcal{P}(X)$.

$\uparrow S = \{U \subseteq X \mid S \subseteq U\}$

Iščemo izomorfizem $f : \mathcal{P}(X) \longrightarrow \Phi$.

Podamo $f : S \longmapsto \uparrow S$.

Preverimo, da je f izomorfizem. Iščemo inverz f.

$$g : \Phi \longrightarrow \mathcal{P}(X)$$
$$g : \mathcal{A} \longmapsto \bigcap \mathcal{A}$$

✱ Preverimo $f(g(\mathcal{A})) = \mathcal{A}$ za vsak $\mathcal{A} \in \Phi$: (2)

$$f(g(\mathcal{A})) = \uparrow(\bigcap \mathcal{A}) \overset{?}{=} \mathcal{A}$$

i) Dokažimo $\uparrow(\bigcap \mathcal{A}) \subseteq \mathcal{A}$:

Naj bo $U \in \uparrow(\bigcap \mathcal{A})$. (1)

Dokazujemo $U \in \mathcal{A}$.

(1) ekvivalentno $\bigcap \mathcal{A} \subseteq U \subseteq X$ (1') .

Ker je $\bigcap \mathcal{A} \subseteq U$ zaradi (1) in je $\mathcal{A}$ gornja množica, je dovolj pokazati $\bigcap \mathcal{A} \in \mathcal{A}$.

To pa drži, ker je $\mathcal{A}$ zaprta za preseke in $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{A}$.

ii) Dokažimo $\mathcal{A} \subseteq \uparrow(\bigcap \mathcal{A})$:

Naj bo $U \in \mathcal{A}$. (2)

Dokažimo $U \in \uparrow(\bigcap \mathcal{A})$.

$\Leftrightarrow \quad \bigcap \mathcal{A} \subseteq U$.

To velja, saj je presek $\bigcap \mathcal{A}$ vsebovan v vseh članih $\mathcal{A}$.

Oziroma: Naj bo $x \in \bigcap \mathcal{A}$. (3)

Dokažimo $x \in U$:

Ker je $x \in \bigcap \mathcal{A}$ in $U \in \mathcal{A}$, sledi $x \in U$.

✱ Preverimo $g(f(S)) = S$ za vse $S \subseteq X$:

Računamo:

$$g(f(S)) = \bigcap(\uparrow S) =$$
$$= \bigcap \{U \subseteq X \mid S \subseteq U\}$$

Dokažimo $\bigcap \{U \subseteq X \mid S \subseteq U\} = S$:

1) $\bigcap \{U \subseteq X \mid S \subseteq U\} \subseteq S$ velja, ker se v preseku na levi pojavi tudi S.

2) $S \subseteq \bigcap \{U \subseteq X \mid S \subseteq U\}$: velja, ker vsi elementi preseka na desni vsebujejo S.