

Razredi in družine

Russellov paradoks

V prejšnji lekciji smo spoznali zapis podmnožice

$$\{ x \in A \mid \varphi(x) \}$$

ki tvori podmnožico A vseh elementov, ki zadoščajo pogoju x . Ko je bila teorija množic še v povojih, se je sama po sebi ponujala ideja, da bi lahko opisali množice kot "kakršnokoli zbirko stvari. Torej bi lahko pisali

$$\{ x \mid \varphi(x) \}$$

za množico vseh tistih stvari (objektov, matematičnih entitet), ki zadoščajo pogoju φ . Se pravi, da bi veljalo

$$a \in \{ x \mid \varphi(x) \} \Leftrightarrow \varphi(a)$$

A izkaže se, da ne moremo kar tako tvoriti povsem poljubnih množic objektov. To je odkril znameniti filozof, logik in matematik Bertrand Russell. Razmislek se po njem imenuje *Russellov paradoks*. Le-ta je v matematiko vnesel pravo "krizo temeljev", iz katere se je v prvi polovici 20. stoletja razvila logika in temelji matematike, kot jih poznamo danes.

Russellov paradoks gre takole. Denimo, da bi lahko tvorili poljubne množice objektov. Tedaj bi lahko tvorili tudi množico vseh množic, ki niso element same sebe:

$$R := \{ S \mid S \notin S \}$$

Sedaj bomo izpeljali protislovje tako, da bomo dokazali $R \in R$ in $R \notin R$:

1. Dokažimo $R \notin R$.

Denimo, da bi veljalo $R \in R$. Potem po definiciji R velja $R \notin R$, kar je v protislovju s predpostavko $R \in R$.

2. Dokažimo $R \in R$. V prvem koraku smo že dokazali $R \notin R$, torej po definiciji R velja $R \in R$.

Kaj lahko storimo? Očitno je treba pazljivo nadzorovati dopustne konstrukcije množic.

Množice in razredi

V sodobni teoriji množic Russellov paradoks razrešimo tako, da ločimo med dvema različnima zvrstema zbirk ali skupkov elementov, namreč **množicami** in **razredi**.

Torej imamo opravka s tremi zvrstmi matematičnih objektov:

1. Elementi, ki niso množice (na primer naravna števila), pravimo jim **urelementi**.
2. Zbirke elementov, ki se imenujejo **množice**.
3. Zbirke elementov, ki se imenujejo **razredi**.

Elementi množic so urelementi in množice. Enako velja za razrede.

V čem je torej razlika med množicami in razredi?

Množica je lahko element (druge množice ali razreda) Razred ne more biti element (druge množice ali razreda).

S tem želimo povedati, da je zapis

$$x \in Y$$

neveljaven, če je x razred. Se pravi, če je x razred, potem $x \in Y$ sploh ni veljaven izraz. Ne moremo govoriti o tem, da je resničen ali neresničen, saj sploh ni smislen.

Vsaka množica je hkrati razred. Ni pa vsak razred tudi množica.

Razred je množica, če ga lahko skonstruiramo še na kak drug način s pomočjo pravil za konstrukcije množic (kartezični produkti, vsote, eksponenti, unije, preseki, podmnožice in vse ostale konstrukcije množic, ki jih bomo še spoznali).

Pravi razred je tak razred, ki ni množica.

Z zapisom

$$\{ x \mid \varphi(x) \}$$

definiramo *razred* vseh objektov, ki zadoščajo pogoju φ . Se pravi, da velja

$$a \in \{ x \mid \varphi(x) \} \Leftrightarrow \varphi(a)$$

Poglejmo nekaj primerov.

Russellov razred $R := \{ S \mid S \notin S \}$ vsebuje vse množice, ki niso element same sebe. Paradoks smo razrešili, saj je nesmiselno zapisati $R \in R$.

Razred vseh množic

$$V := \{ S \mid S \text{ je množica} \}$$

ki ga označimo tudi s set . To je pravi razred. Res, če bi bil V množica, potem bi lahko tvorili podmnožico

$$\{ S \in V \mid S \notin S \}$$

ki ni nič drugega kot Russellov R . Tako bi spet dobili protislovje. Torej V ni množica.

Ostali primeri, v katere se ne bomo poglobljali:

- razred vseh enojcev $\{ S \mid \exists! x \in S . \top \}$
- razred vseh grup
- razred vseh vektorskih prostorov

Z razredi lahko delamo tako kot z množicami: tvorimo unije, preseke in produkte razredov, govorimo po podrazredih). Pri tem uporabljamo enake oznake za operacije kot pri množicah. Paziti moramo le, da razreda nikoli ne uporabimo kot element kake množice ali razreda. Na primer, če je C razred, lahko tvorimo “potenčni razred” $P(C)$, ki vsebuje vse *podmnožice* C :

$$P(C) := \{ S \mid S \in \text{Set} \wedge S \subseteq C \}$$

Ne smemo pa tvoriti $\{ D \mid D \subseteq C \}$, ker bi s tem C postal element razreda $\{ D \mid D \subseteq C \}$.

Družine množic

Pogosto imamo opravka z zbirko množic. Če je zbirka končna, lahko množice preprosto naštejemo in vsako od njih poimenujemo

$$A = \dots$$

$$B = \dots$$

$$C = \dots$$

Če je množic neskončno, jih morda lahko oštevilčimo:

$$A_1 = \dots$$

$$A_2 = \dots$$

$$A_3 = \dots$$

$$A_4 = \dots$$

...

A tu se zadeve še ne končajo, saj lahko v splošnem obravnavamo poljubno zbirko množic. Takim zbirkam pravimo *družine množic*. Družina množic je *indeksirana* z elementi neke množice I , ki ji pravimo *indeksna množica*. Za vsak $i \in I$ imamo množico

$$A_i = \dots$$

To lahko izrazimo tudi takole:

Definicija: Družina množic je preslikava $I \rightarrow \text{set}$. Množici I pravimo *indeksna množica*.

Primeri družin:

1. Končno zbirko množic lahko indeksiramo s končno množico. Denimo, da imamo množice A, B, C, D, E . Iz njih lahko tvorimo družino s

$$I = \{1, 2, 3, 4, 5\}$$

$$s_1 = A$$

$$s_2 = B$$

$$s_3 = C$$

$$s_4 = D$$

$$s_5 = E.$$

2. Množice v družini se lahko ponavljajo. V prejšnjem primeru bi lahko na primer imeli $A = C$ in bi tako veljalo $s_1 = s_3$. Skrajni primer je *konstantna družina*, v kateri so vse množice med seboj enake.
3. *Prazna družina* je družina množic, ki je indeksirana \emptyset .
4. Prazno družino moramo ločiti od družine praznih množic

$$I \rightarrow \text{Set}$$

$$i \mapsto \emptyset$$

5. *Neprazna družina* je družina indeksirana z neprazno množico. Družina nepraznih množic je družina, v kateri so vse množice neprazne:
 - o Prazna družina je družina nepraznih množic.
 - o Družina praznih množic je lahko prazna družina (ko je indeksna množica \emptyset)
 - o Družina praznih množic je lahko neprazna družina (ko je indeksna množica nerazna).

Konstrukcije in operacije z družinami množic

Operacije \times , $+$, \cap in \cup lahko posplošimo tako, da namesto z dvema množicama delujejo na poljubnem številu množic. V ta namen uporabimo družine množic.

Presek in unija družine

Presek in unija družine $A : I \rightarrow \text{Set}$ je definirana takole:

$$\cup_{(i \in I)} A_i = \{ x \mid \exists i \in I . x \in A_i \}$$

$$\cap_{(i \in I)} A_i = \{ x \mid \forall i \in I . x \in A_i \}$$

Pozor! Na desni strani imamo razred! Res se lahko zgodi, da dobimo pravi razred, denimo kot presek prazne družine:

$$\cap_{(i \in \emptyset)} A_i = \{ x \mid \forall i \in \emptyset . x \in A_i \} = \{ x \mid \top \} = V$$

Kdaj pa dobimo množico? Presek neprazne družine je vedno množica. Res, če imamo $k \in I$, potem velja

$$\cap_{(i \in \emptyset)} A_i = \{ x \in A_k \mid \forall i \in \emptyset . x \in A_i \}$$

Sedaj na desni ne stoji več razred, ampak podmnožica množice A_k .

Kaj pa unija družine množic? Ali je množica, ali bi lahko dobili pravi razred, denimo v , kot unijo družine množic? Izkazuje se, da za to potrebujemo aksiom:

Aksiom: Unija družine množic je množica.

Kartezični produkt

Denimo, da imam družino množic $A : I \rightarrow \text{Set}$.

Funkcija izbire f za A je prirejanje, ki vsakemu indeksu $i \in I$ priredi neki element $f(i) \in A_i$ iz A_i .

Primer: funkcija izbire za družino

$$A : \mathbb{N} \rightarrow \text{Set}$$

$$A_n = \{ x \in \mathbb{R} \mid 0 < x < 2^{-n} \}$$

je na primer $f(n) = 2^{-(n-1)}$ ali pa $f(n) = 2^{-n} / 3$. To ni edina funkcija izbire za A .

Kartezični produkt družine $A : I \rightarrow \text{Set}$ je množica

$$\prod_{(i \in I)} A_i$$

katere elementi so funkcije izbire za A . To je nova konstrukcija množice.

Za vsak $j \in I$ imamo **j -to projekcijo**

$$\text{pr}_j : \prod_{(i \in I)} A_i \rightarrow A_j$$

$$\text{pr}_j : f \mapsto f(j)$$

Običajni kartezični produkt dveh množic je poseben primer produkta množic, namreč družine množic, ki je indeksirana z $I = \{1, 2\}$. Natančneje, velja

$$A \times B \cong \prod_{i \in \{1, 2\}} C_i$$

kjer je $C_1 = A$ in $C_2 = B$.

Tudi eksponentna množica je poseben primer produkta množic, saj velja

$$B^A \cong \prod_{a \in A} B$$

Na desni imamo produkt konstantne družine množic

$$A \rightarrow \text{Set}$$

$$a \mapsto B$$

Koprodukt ali vsota množic

Vsoto množic posplošimo na koprodukt družine. Za dano družino $A : I \rightarrow \text{Set}$ tvorimo množico

$$\sum_{i \in I} A_i$$

Elementi koprodukta so oblike

$$\text{in}_k(a)$$

kjer je $k \in I$ in $a \in A_k$. Preslikavi

$$\text{in}_k : A_k \rightarrow \sum_{i \in I} A_i$$

pravimo **k-ta injekcija**.

Namesto \sum se piše tudi \coprod .

Poseben primer koprodukta je vsota $A + B$, saj velja

$$A + B \cong \sum_{k \in \{1, 2\}} C_k$$

kjer je

$$C : \{1, 2\} \rightarrow \text{Set}$$

$$C_1 = A$$

$$C_2 = B.$$

Kartezični produkt $A \times B$ je tudi poseben primer koprodukta, saj velja

$$A \times B \cong \sum_{a \in A} B$$

Na desni imamo tokrat koprodukt konstantne družine množic

$$A \rightarrow \text{Set}$$

$$a \mapsto B$$