Aksiom izbire & Zornova lema

<u>Definicija</u>: V delni urejenosti $(P, \leq)$ je $V \subseteq P$ <u>veriga v P</u>, če je V linearno urejena z $\leq$, tj.

$$\forall x, y \in V.\ x \leq y \lor y \leq x.$$

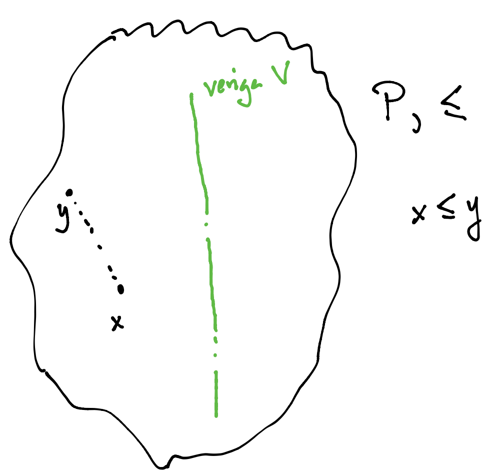
<u>Primer</u>:

1. Če je P linearno urejena, potem je vsaka $V \subseteq P$ veriga.
2. V $(\mathcal{P}(\mathbb{N}), \subseteq)$ imamo verige:
   - $\emptyset \subseteq \{0\} \subseteq \{0,1\} \subseteq \{0,1,2\} \subseteq \dots$
   - $\mathbb{N} \supseteq \mathbb{N} \setminus \{0\} \supseteq \mathbb{N} \setminus \{0,1\} \supseteq \mathbb{N} \setminus \{0,1,2\} \supseteq \dots$
3. V $(\mathcal{P}(\mathbb{Q}), \subseteq)$ imamo verigo

$$\mathbb{R} = \{ S \subseteq \mathbb{Q} \mid S \text{ je Dedekindov rez} \} \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{Q})$$

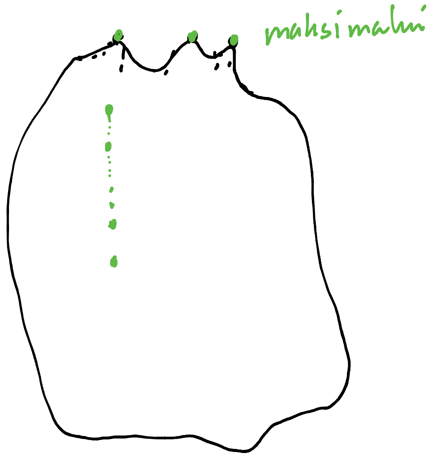
Res: če sta S in T Dedekindova reza, velja $S \subseteq T$ ali $T \subseteq S$.

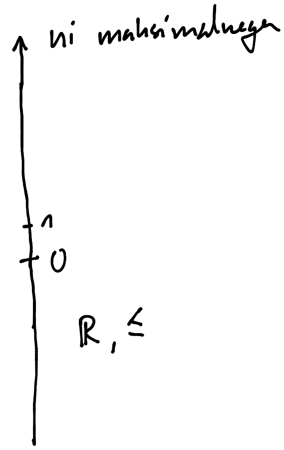
Slika:

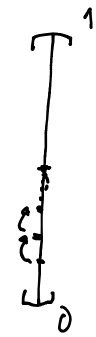


Zornova lema:

Če ima v delni urejenosti $(P, \le)$ vsaka veriga zgornjo mejo, potem ima P maksimalni element.







Dokaz:

Uporabili bomo:

1. Aksiom izbire
2. Bourbaki-Wittov izrek:

Def: Preslikava $f: P \to P$ je <u>progresivna</u>, če velja $x \le f(x)$ za vse $x \in P$.

Izrek: Naj bo $(P, \le)$ delna urejenost, v kateri ima vsaka veriga zgornjo mejo in naj bo $f: P \to P$ progresivna. Tedaj ima f negibno točko: obstaja $x \in P$, da je $f(x) = x$.

Dokaz: opuščen. Za dokaz potrebujemo izključeno tretjo možnost. AC ne potrebujemo.

$$ZF \vdash AC \Leftrightarrow \text{Zorn}$$

↳ logika 1. reda (klasična) + aksiomi teorije množic brez AC

Dokaz Zornove leme:

Naj C množica vseh verig v P:

$$C := \{V \subseteq P \mid \forall x,y \in V.\ x \le y \vee y \le x\}$$

C delno uredimo z $\subseteq$.

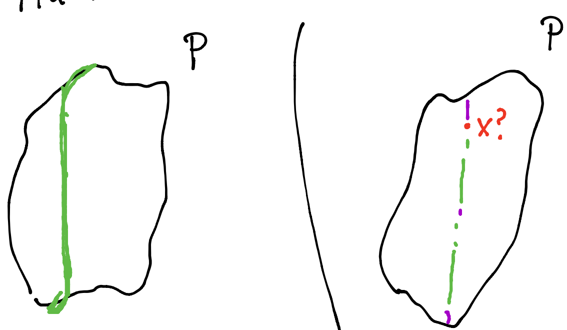
Definiramo $f : C \to C$:

$$f(V) = \begin{cases} V & \text{če je } V \text{ maksimalna v } C \\ V \cup \{x\} & \text{če } V \text{ ni maksimalna v } C, \end{cases}$$

<u>izberemo</u> $x \in P$, da velja $V \subseteq V \cup \{x\}$ in $x \notin V$.

1. Uporabili smo aksiom izbire: za vsako $V \in C$, ki ni maksimalna, smo <u>izbrali</u> neki $x \in P$, $x \notin V$
   $V \cup \{x\}$ je veriga

2. Ali res lahko izberemo tak x?



V maksimalna
$f(V) = V$

V ni maksimalna $\Rightarrow$
obstaja $W \in C$ da je
$V \subseteq W$, $V \neq W$
$\Rightarrow$ obstaja $x \in W \setminus V$. $\Rightarrow$
$\underbrace{V \subsetneq V \cup \{x\}}_{\text{veriga}} \subseteq \underbrace{W}_{\text{veriga}}$

f je progresivna:

$$f(V) = \begin{cases} V & \ldots\ldots \quad V \subseteq f(V) \\ V \cup \{x\} & \ldots\ldots \quad V \subseteq f(V) \end{cases}$$

Po Bourbaki-Witt obstaja $V \in C$, da velja $f(V) = V$.

Sledi, da je V maksimalna veriga.

Po predpostavki Zornove leme ima V zgornjo mejo $m \in P$.

Trdimo, da je m maksimalni element v P:

denimo, da je $x \in P$ in $m \leq x$. Dokažimo $x \leq m$.

$V \cup \{x\}$ je veriga $\Rightarrow$

ker je V maksimalna, velja

$V \cup \{x\} \subseteq V \quad \Rightarrow$

$x \in V \quad \Rightarrow$

$x \leq m$ ker m zgornja meja za V ∎

<u>Izrek</u>: V teoriji množic <u>brez aksioma izbire</u> so ekvivalentne naslednje izjave

1. Aksiom izbire
2. Zornova lema
3. Princip dobre urejenosti:
   Vsako množico lahko dobro uredimo

<u>Izrek</u>: Vsak vektorski prostor ima bazo.

Dokaz: Naj bo L vektorski prostor. Definiramo

$$P := \{ B \subseteq L \mid B \text{ je linearno neodvisna} \}$$

P delno uredimo z $\subseteq$.

Preverimo: vsaka veriga v P ima zgornjo mejo.

Naj bo $V \subseteq P$ veriga v P. Iščemo zg. mejo za V v P.

Trdimo, da je $\bigcup_{B \in V} B$ zgornja meja za V. (vaja iz alg.)

Lahko uporabimo Zornovo lemo: obstaja maksimalna lin. neodvisna $B \subseteq L$. Ta je baza:

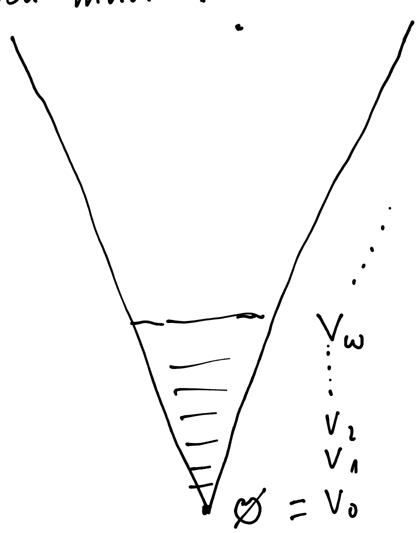
Za $x \in V$, $B \cup \{x\}$ ne more biti še večja lin. neod.

1. $x \in B$ ali
2. $B \cup \{x\}$ ni lin. neodvisna

$\Rightarrow$ x je lin. komb vektorjev iz B. $\blacksquare$

Kumulativna hierarhija

V razred vseh množic.



V lahko zgradimo po stopnjah:

$$V_0 = \emptyset \qquad 0$$

$$V_1 = \mathcal{P}(V_0) = \{\emptyset\} \qquad 1$$

$$V_2 = \mathcal{P}(V_1) = \{\emptyset, \{\emptyset\}\} \qquad 2$$

$$V_3 = \mathcal{P}(V_2) = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\} \qquad 4$$

$$V_4 = \mathcal{P}(V_3) = \{\ldots, \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}, \ldots\}$$

$\vdots$

$$|V_{n+1}| = |\mathcal{P}(V_n)| = 2^{|V_n|}$$

$$|V_4| = 2^4 = 16$$

$$|V_5| = 2^{16} = 65536$$

$$|V_6| = 2^{65536}$$

$$V_\omega = \bigcup_{n \in \omega} V_n$$ limitna stopnja

$$\mathbb{N} \subseteq V_\omega, \quad \mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$$

$$V_{\omega+1} = \mathcal{P}(V_\omega) \qquad \mathbb{N} \in V_{\omega+1}$$

$$V_{\omega+2} = \mathcal{P}(V_{\omega+1})$$

$\vdots$

$\mathbb{Z} \in V_{\omega+3}$ (pravi)

$\mathbb{R} \in V_{\omega+6}$ (pravi)

$$V_{\omega+\omega} = \bigcup_{\alpha < \omega+\omega} V_\alpha$$

$V_{\omega+\omega+1}$

$V_{\omega+\omega+2}$

$\vdots$

$V_{\omega+\omega+\omega}$

$\vdots$

$V_{\omega+\omega+\omega+\omega}$

$\vdots$

$V_{\omega\cdot\omega}$

$V_{\omega\cdot\omega\cdot\omega}$

$\vdots$

V_{ω^ω}

$\vdots$

$V_{\omega^{\omega^\omega}}$

$\vdots$

$V_{\omega^{\omega^{\omega^\omega}}}$

$\vdots$

V_{ε_0}

$\vdots$

V_α → kaj je ta α?

Ordinalno število:

Ordinalno število je množica α:

- α je <u>tranzitivna</u>:

  $\left.\begin{array}{l}\forall x \in \alpha.\, \forall y \in x.\; y \in \alpha\end{array}\right\}$ α tranzitivna

  $x \in \alpha \wedge y \in x \Rightarrow y \in \alpha$

- vsi elementi α so tranzitivne množice

  $\forall x \in \alpha.\; x$ je tranzitivna

$On = \{\alpha \in V \mid \alpha$ ordinalno število$\}$

razred ordinalnih števil

$(\alpha, \in)$ dobra urejenost za $\alpha \in On$

Card: razred kardinalnih števil (po en predstavnik za vsako moč množic)

$$Card := \{\alpha \in On \mid \forall \beta \in \alpha.\, \neg \exists f : \alpha \to \beta.\; f \text{ injektivna}\}$$
$$= \{\alpha \in On \mid \forall \beta \in \alpha.\; |\beta| < |\alpha|\}$$

$$\mathrm{On} := \{ \underset{\overset{\shortparallel}{0}}{\varnothing},\ \underset{\overset{\shortparallel}{1}}{\{\varnothing\}},\ \underset{\overset{\shortparallel}{2}}{\{0,1\}},\ \underset{\overset{\shortparallel}{3}}{\{0,1,2\}},\ \dots,\ \underset{\overset{\shortparallel}{\{0,1,2,3,\dots\}}}{\omega},\ \omega+1,\ \omega+2,\ \dots\dots$$

$$\{0,1,2,3,\dots\} = \mathbb{N}$$

$$\dots\dots\ \varepsilon_0\ \dots\dots\ \omega_1\ \dots$$

$$\alpha \in \mathrm{On} \Rightarrow \alpha^+ = \alpha \cup \{\alpha\} \in \mathrm{On}$$

$$\mathrm{Card} := \{ \varnothing,\ 1,\ 2,\ 3,\ \dots\dots,\ \underset{\overset{\shortparallel}{\aleph_0}}{\omega},\ \underset{\overset{\shortparallel}{\aleph_1}}{\omega_1},\ \aleph_2\ \dots\ \aleph_\omega\ \dots\dots$$

$$\aleph_1 \overset{?}{=} 2^{\aleph_0} = 2^{|\mathbb{N}|} = |\mathcal{P}(\mathbb{N})| = |\mathbb{R}|$$

Cantorjeva hipoteza