Aksiom izbire

Aksiom odvisne izbire:

Naj bo A neprazna in $R \subseteq A \times A$ celovita, t.j.,

$$\forall x \in A .\, \exists y \in A .\, x R y$$

Tedaj obstaja zaporedje $a : \mathbb{N} \to A$, da je

$$\forall n \in \mathbb{N} .\, a_n \, R \, a_{n+1}$$

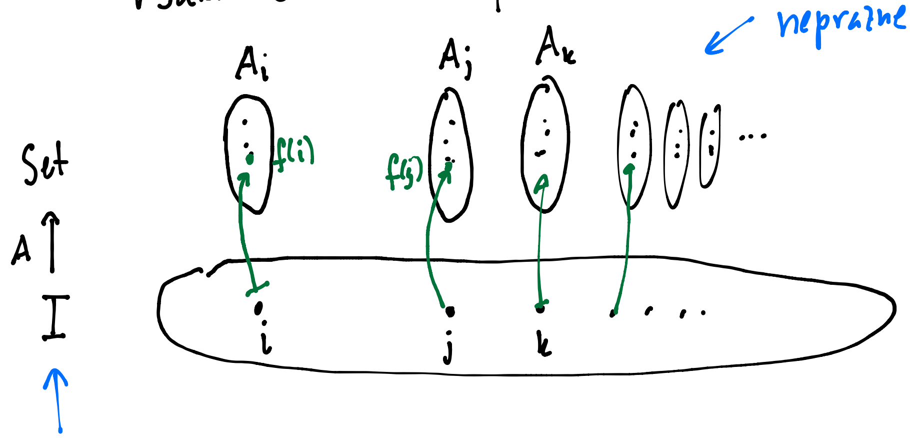
V praksi:

Definiramo zaporedje $a_0, a_1, a_2, a_3, \dots$

1. Najprej definiramo a_0.
2. Ko definiramo a_{n+1} je ta odvisen od prejšnjih členov in imamo na voljo več kandidatov za a_{n+1}. Tedaj za a_{n+1} izberemo enega kandidatov, a pustimo izbiro poljubno.

Aksiom izbire (AC)

Vsaka družina nepraznih množic ima funkcijo izbire.



lahko je prazna

Funkcija izbire: $f : I \to \bigcup_{i \in I} A_i$

$$\forall i \in I .\ f(i) \in A_i$$

Ekvivalentno:

Produkt družine nepraznih množic je neprazen:

$$\Big(\forall i \in I .\ \underbrace{A_i \neq \emptyset}_{A_i \text{ ni prazna}}\Big) \Rightarrow \prod_{i \in I} A_i \neq \emptyset$$

$$\Big(\forall i \in I .\ \underbrace{\exists x \in A_i .\ \top}_{\substack{A_i \text{ vsebuje element} \\ \text{"}A_i \text{ je naseljena"}}}\Big) \Rightarrow \exists f \in \prod_{i \in I} A_i .\ \top$$

Izrek: $AC \Leftrightarrow$ vsaka surjekcija ima prerez

Moč množic

Končne množice

Def: <u>Standardna množica</u> z $n \in \mathbb{N}$ elementi:

$$[n] := \{ k \in \mathbb{N} \mid k < n \}$$

$[0] = \{\}$
$[1] = \{0\}$
$[2] = \{0,1\}$
$\vdots$

Def: Množica je <u>končna</u>, če je izomorfna kaki standardni množici:

$$A \text{ končna} \Leftrightarrow \exists n \in \mathbb{N}.\ A \cong [n]$$

Velja (ne bomo dokazali):
Če $A \cong [m]$ in $A \cong [n]$, potem $m = n$.
(Dovolj je pokazati: $\forall m, n \in \mathbb{N}.\ [m] \cong [n] \Rightarrow m = n$.)

Def: <u>Moč</u> končne množice A, pišemo $|A|$, je tisti $n \in \mathbb{N}$, da velja $A \cong [n]$.

Pravila za moč končnih:

$$|[n]| = n$$

$$|A+B| = |A|+|B|$$

$$|\emptyset| = 0$$

$$|A\times B| = |A|\cdot|B|$$

$$|B^A| = |B|^{|A|}$$

$$|A\cup B|+|A\cap B| = |A|+|B| \quad \text{vključitev / izključitev}$$

$$|A\cup B\cup C| = |A|+|B|+|C|-|A\cap B|-|A\cap C|-|B\cap C|+|A\cap B\cap C|$$

Splošne množice

$|A|$ moč množice ? "Kardinalno število"

Naravna števila so končna kardinalna števila.

Povemo, kako množice primerjamo po moči.

Def: Moč A je manjša ali enaka moči B, če obstaja injektivna $A\to B$:

$$|A|\leq|B| \iff \exists f: A\to B.\ f \text{ injektivna.}$$

Def: $|A|=|B|$ ekvipolentni $\iff A\cong B$

$$|A|<|B| \iff |A|\leq|B| \text{ in } |A|\neq|B|.$$

Izrek: 1. $|A| \leq |A|$

2. $|A| \leq |B|$ in $|B| \leq |C| \Rightarrow |A| \leq |C|$

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, tail, "f"] \arrow[rr, tail, bend right, "g \circ f"'] & B \arrow[r, tail, "g"] & C \end{tikzcd}$$

$\leq$ delna urejenost

3. $|A| \leq |B|$ in $|B| \leq |A| \Rightarrow |A| = |B|$

$A \underset{inj}{\rightarrowtail} B \qquad B \underset{inj}{\rightarrowtail} A \qquad A \underset{bij}{\rightarrowtail\!\!\!\twoheadrightarrow} B$

Cantor-Schröder-Bernsteinov izrek

linearnost: 4. $|A| \leq |B|$ ali $|B| \leq |A|$

Sledi iz CSB.

Neskončne množice

Def: Množica je <u>neskončna</u>, če ni končna.

Izrek: Množica A je neskončna natanko tedaj, ko obstaja injektivna preslikava $\mathbb{N} \to A$.

Dokaz (ideja)

$\boxed{\Rightarrow}$ Denimo, da A ni končna: $\forall n \in \mathbb{N}.\ A \not\cong [n]$.

Kako definiramo injektivno $e : \mathbb{N} \to A$?

Ker $A \neq \emptyset = [0]$, obstaja $x \in A$.

$e_0 := x$

Če smo že definirali $e_0, \dots, e_n$, kako definiramo e_{n+1}?

Za e_{n+1} smemo izbrati katerikoli element $A \setminus \{e_0, \dots, e_n\}$, ki ni prazna, ker $A \not\cong \{e_0, \dots, e_n\}$
$\begin{array}{r}\| ? \\ [n+1]\end{array}$

Posledica: A je neskončna $\iff$ $|\mathbb{N}| \leq |A|$

Cantorjev izrek: $|A| < |\mathcal{P}(A)|$

Dokaz.

(1) $|A| \leq |\mathcal{P}(A)|$

Iščemo injektivno $f : A \to \mathcal{P}(A)$.

Vzemimo $f(x) = \{x\}$. Ta je injektivna:

$$f(x) = f(y) \Rightarrow$$
$$\{x\} = \{y\} \Rightarrow$$
$$x \in \{x\} = \{y\} \Rightarrow$$
$$x = y$$

(2) $|A| \neq |\mathcal{P}(A)|$

Ne obstaja izomorfizem $A \to \mathcal{P}(A)$.

Dokažimo: ne obstaja surjektivna $A \to \mathcal{P}(A)$.

Dokažimo: $\forall g : A \to \mathcal{P}(A)\,.\, g$ ni surjektivna

$\forall g : A \to \mathcal{P}(A)\,.\, \exists S \in \mathcal{P}(A)\,.\, \forall x \in A\,.\, g(x) \neq S.$

Naj bo $g : A \to \mathcal{P}(A)$.

Vzemimo $S := \{x \in A \mid x \notin g(x)\}$

Preverimo $\forall x \in A\,.\, g(x) \neq S$.

Naj bo $y \in A$. Denimo $g(y) = S$. Iščemo protislovje:

1. $y \notin S$:

če $y \in S$, potem po def. S dobimo $y \notin g(y) = S$,

to je v protislovju z $y \in S$.

Dobili smo: $y \in S \Rightarrow y \notin S$, od koder sledi $y \notin S$.

$$(A \Rightarrow \neg A) \Rightarrow \neg A$$

2. $\neg(y \notin S)$:

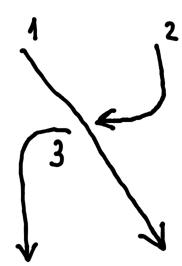
če $y \notin S$, potem po def S dobimo $y \in S$, ker

$$y \notin S = g(y)$$

Dobili smo: $y \notin S \Rightarrow y \in S$, torej $\neg(y \notin S)$. ∎

Števne in neštevne množice

Moč množice $\mathbb{N}$ označimo z $\aleph_0$ $\qquad \aleph \; \aleph \; \aleph$



alef

<u>Def</u>: Množica A je <u>števna</u>, če $|A| \le \aleph_0$.

↳ končna ali izomorfna $\mathbb{N}$.

Množica A je <u>neštevna</u>, če ni števna.

↳ $\aleph_0 < |A|$.

Izrek: Za vsako množico `A` so ekvivalentne naslednje izjave:

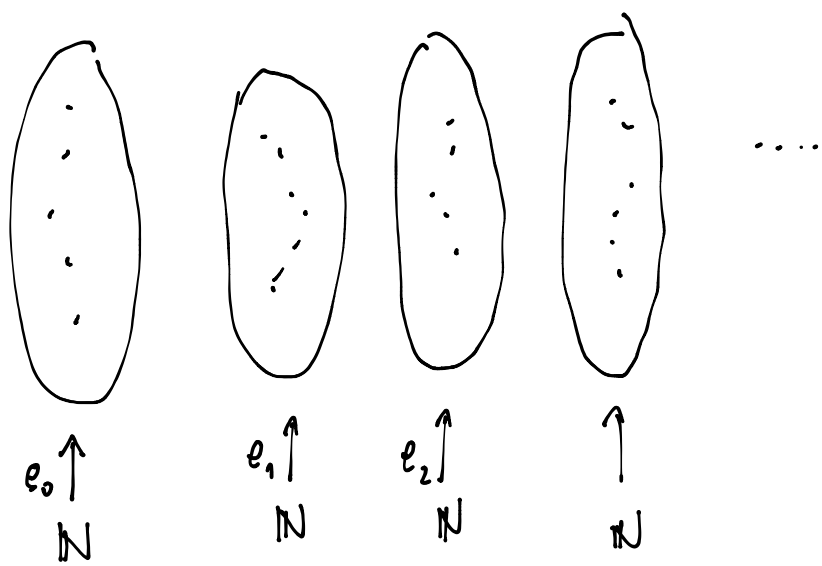
1. `A` je števna
2. obstaja injektivna preslikava `A → N`
3. `A` je prazna ali obstaja surjektivna preslikava `N → A`
4. obstaja surjektivna preslikava `N → 1 + A`
5. `A` je končna ali izmoforna `N`

<u>Izrek</u>: Unija števne družine števnih množic je števna.

$A : \mathbb{N} \to \mathrm{Set}$

$A_0 \quad A_1 \quad A_2 \quad A_3 \quad \dots$

števne



$\forall k \in \mathbb{N}.\ e_k : \mathbb{N} \to A_k$ našteje A_k

$e : \mathbb{N} \to A_k^{\mathbb{N}}$ dobimo z aksiomom izbire

$e_k : \mathbb{N} \to A_k$

Izrek (Cantor - Schröder - Bernstein):

glej zapiske.

Cantorjeva hipoteza:

Vsaka neskončna podmnožica $\mathbb{R}$ je bodisi števna bodisi ima enako moč kot $\mathbb{R}$.

Drugače ($|\mathbb{R}| = |\mathcal{P}(\mathbb{N})|$) $\quad |\mathcal{P}(\mathbb{N})| = |2^{\mathbb{N}}| = 2^{\aleph_0}$

Če $\aleph_0 \leq |A| \leq 2^{\aleph_0}$, potem $\aleph_0 = |A|$ ali $|A| = 2^{\aleph_0}$.

Odgovor: Aksiomi teorije množice $\to$ Zermelo-Fraenkelovi
Cantorjeve hipoteze ne dokažejo in ne ovržejo.