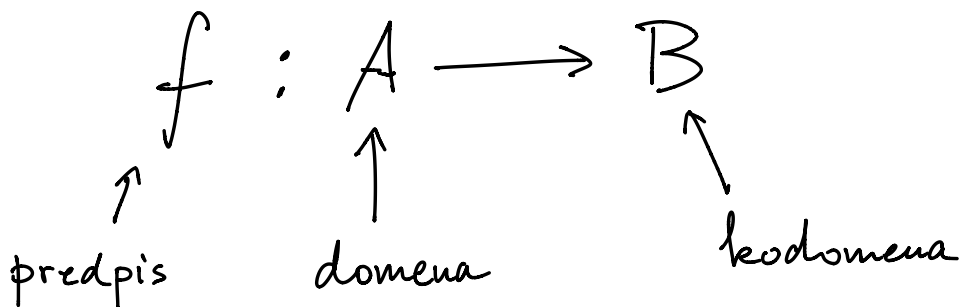


FUNKCIJE



Def: Funkcija $f: A \rightarrow B$ je

(1) injektivna, če velja

$$\forall x, y \in A. f(x) = f(y) \Rightarrow x = y$$

(2) surjektivna, če velja

$$\forall y \in B. \exists x \in A. f(x) = y$$

(3) bijektivna, če je injektivna in surjektivna.

Opombe:

(1) ekvivalentni pogoj: $\forall x, y \in A. x \neq y \Rightarrow f(x) \neq f(y)$
"različne slike v različne"

$$\left. \begin{array}{l} a+b = a+c \Rightarrow b=c \\ A \circ B = A \cdot C \end{array} \right\}$$

Def: Funkcija $f: A \rightarrow B$ je

(1) monomorfizem (mono), če jo lahko krajšamo na levi:

$$C \begin{array}{c} \xrightarrow{g} \\ \xrightarrow{h} \end{array} A \xrightarrow{f} B$$

$$\forall C. \forall g, h: C \rightarrow A. f \circ g = f \circ h \Rightarrow g = h$$

(2) epimorfizem (epi), če jo lahko krajšamo na desni:

$$A \xrightarrow{f} B \begin{array}{c} \xrightarrow{g} \\ \xrightarrow{h} \end{array} C$$

$$\forall C. \forall g, h: B \rightarrow C. g \circ f = h \circ f \Rightarrow g = h$$

(3) izomorfizem, če obstaja $g: B \rightarrow A$, da je

$$f \circ g = \text{id}_B \quad \text{in} \quad g \circ f = \text{id}_A.$$

Pravimo, da je g inverz funkcije f .

Izrek:

Naj bo $f: A \rightarrow B$ in $g_1, g_2: B \rightarrow A$ oba inverza f .

Potem sta g_1 in g_2 enaka.

S formulo: $\forall A, B. \forall f: A \rightarrow B. \forall g_1, g_2: B \rightarrow A.$

$$f \circ g_1 = \text{id}_B \wedge g_1 \circ f = \text{id}_A \wedge$$

$$f \circ g_2 = \text{id}_B \wedge g_2 \circ f = \text{id}_A \Rightarrow g_1 = g_2.$$

Dokaz: Naj bosta A in B množici.

Naj bo $f: A \rightarrow B$ funkcija. Naj bosta $g_1, g_2: B \rightarrow A$ funkciji

Pretpostavimo:

$$1) f \circ g_1 = \text{id}_B \quad 3) f \circ g_2 = \text{id}_B$$

$$2) g_1 \circ f = \text{id}_A \quad 4) g_2 \circ f = \text{id}_A$$

Dokazujemo $g_1 = g_2$:

⊆ Predpostavimo f mono. Dokažujemo: f injektivna.

Naj bosta $x, y \in A$ in dokažujemo $f(x) = f(y)$.

✓ Dokažujemo $x = y$.

Definiramo funkciji $g, h: \{*\} \rightarrow A$:

$$g(*) := x$$

$$h(*) := y$$



Iz (1) sledi:

$$(f \circ g)(*) = f(g(*)) = f(x) = f(y) = f(h(*)) = (f \circ h)(*)$$

Preverili smo, da $f \circ g$ in $f \circ h$ enako delujeta na vseh elementih domene $\{*\}$. Torej: $f \circ g = f \circ h$.

Ker je f mono po (2), sledi $g = h$. Torej

$$x = g(*) = h(*) = y.$$

Izrek: Funkcija je surjektivna natanko tedaj, ko je epi.

Dohat: Naj bo $f: A \rightarrow B$ funkcija.

⇒ Predpostavimo, da je f surjektivna.

Dokažujemo f epi. ✓

$$A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$$

Naj bosta $g, h: B \rightarrow C$ in $g \circ f = h \circ f$.

Dokažujemo $g = h$. ✓

Naj bo $y \in B$. Dokažujemo $g(y) = h(y)$. ✓

Obstaja $x \in A$, da je $f(x) = y$ po (1). $\left. \begin{array}{l} \text{vstavimo} \\ y = f(x) \end{array} \right\}$

Dokažujemo: $g(f(x)) = h(f(x))$.

$$(g \circ f)(x) = (h \circ f)(x)$$

Po (2) je $g \circ f = h \circ f$, torej je res $(g \circ f)(x) = (h \circ f)(x)$.

⊆ Predpostavimo $f: A \rightarrow B$ epi. Dokazujemo f surjektiva.
 Naj bo $y \in B$. Dokazujemo, da obstaja $x \in A$, da je $f(x) = y$.

Definiramo $g, h: B \rightarrow \mathcal{P}(B)$:

$$g(z) := \{z\}$$

$$h(z) := \{z \mid \exists a \in A. f(a) = z\} = \begin{cases} \emptyset & \text{če } \neg \exists a \in A. f(a) = z \\ \{z\} & \text{če } \exists a \in A. f(a) = z \end{cases}$$

$$= \{z\} \cap f_*(A).$$

Trdimo $g \circ f = h \circ f$: za $u \in A$ velja:

$$g(f(u)) = \{f(u)\}$$

$$h(f(u)) = \{f(u)\} \quad \text{ker } f(u) \in f_*(A).$$

Ker je f epi ga lahko podvajamo, torej

$$g = h$$

Torej je $g(y) = h(y)$

$$\{y\} = \{y \mid \exists a \in A. f(a) = y\}$$

Ker je $\{y\} = \{y \mid \exists a \in A. f(a) = y\}$ sledi

$$\exists a \in A. f(a) = y.$$

Torej za neki $a \in A$ velja $f(a) = y$.

Vzemimo $x := a$. Potem res velja $f(x) = y$. ■

Definicija: Če za $f: A \rightarrow B$ in $g: B \rightarrow A$ velja

$$f \circ g = \text{id}_B$$

pravimo:

- f je levi invert g
- g je desni invert f
- f je retrakcija in g je prerez f -a.

Lema: 1) Vsaka retrakcija je epi.
2) Vsak prerez je mono.

Dokaz:

1) Naj bo $f: A \rightarrow B$ retrakcija, kar pomeni, da imamo tudi $g: B \rightarrow A$, da je $f \circ g = \text{id}_B$.

Dokazujemo: f epi.

Naj bosta $h, l: B \rightarrow C$ in definiramo $h \circ f = l \circ f$.

Dokazujemo $h = l$.

Ker je $h \circ f = l \circ f$, je tudi

$$(h \circ f) \circ g = (l \circ f) \circ g$$

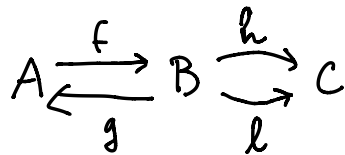
$$h \circ (f \circ g) = l \circ (f \circ g)$$

$$h \circ \text{id}_B = l \circ \text{id}_B$$

$$h = l.$$

↓ asoc.

↓ predp.

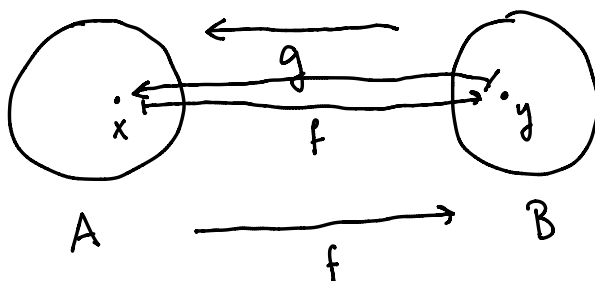


(2) doma.

Izrek: Preslikava je bijekcija, natanko tedaj, ko je izomorfizem.

Dohat: Naj bo $f: A \rightarrow B$.

\Rightarrow Predpostavimo f bijekcija. Dokažujemo: f je izomorfizem.
Iščemo $g: B \rightarrow A$, da velja $f \circ g = \text{id}_B$ in $g \circ f = \text{id}_A$.



Definiramo: $g(y) :=$ tisti $x \in A$, za katerega je $f(x) = y$

Utemeljimo, da je g dobro definirana:

- tak x obstaja, ker je f surjekcija
- tak x je en sam, ker je f injekcija

Preverimo:

- $f \circ g = \text{id}_B$:

Naj bo $y \in B$, dokažujemo $f(g(y)) = y$.

Res, po definiciji g .

- $g \circ f = \text{id}_A$:

Naj bo $x \in A$, dokažujemo $g(f(x)) = x$.

Res, po definiciji g .

\Leftarrow Predpostavimo, da je f izomorfizem.
Dokažujemo: f bijekcija.

1) f je injektivna \leftarrow dokazujem

f je mono \leftarrow dokazujem

Po lemi zadošča poiskati levi invert f^{-a} .

Ker je f izomorfizem, ima invert f^{-1} ,

toraj f res ima levi invert.

2) f je surjektivna \leftarrow dokazujemo

[domača naloga] Podobno 1).

