FUNKCIJE

$$f : A \longrightarrow B$$

predpis — domena — kodomena

<u>Def</u>: Funkcija $f : A \to B$ je

(1) <u>injektivna</u>, če velja

$$\forall x, y \in A .\ f(x) = f(y) \Rightarrow x = y$$

(2) <u>surjektivna</u>, če velja

$$\forall y \in B .\ \exists x \in A .\ f(x) = y$$

(3) <u>bijektivna</u>, če je injektivna in surjektivna.

<u>Opombe</u>:

(1) ekvivalentni pogoj: $\forall x, y \in A .\ x \neq y \Rightarrow f(x) \neq f(y)$

"različne slika v različne"

$a + b = a + c \Rightarrow b = c$

$A \circ B = A \circ C$

Def: Funkcija $f: A \to B$ je
(1) monomorfizem (mono), če jo lahko krajšamo na levi:

$$C \underset{h}{\overset{g}{\rightrightarrows}} A \xrightarrow{f} B$$

$$\forall C. \forall g, h : C \to A.\ f \circ g = f \circ h \Rightarrow g = h$$

(2) epimorfizem (epi), če jo lahko krajšamo na desni:

$$A \xrightarrow{f} B \underset{h}{\overset{g}{\rightrightarrows}} C$$

$$\forall C. \forall g, h : B \to C.\ g \circ f = h \circ f \Rightarrow g = h$$

(3) izomorfizem, če obstaja $g : B \to A$, da je

$$f \circ g = id_B \quad \text{in} \quad g \circ f = id_A .$$

Pravimo, da je g inverz funkcije f.

Izrek:
Naj bo $f : A \to B$ in $g_1, g_2 : B \to A$ oba inverza f.
Potem sta g_1 in g_2 enaka.

S formulo: $\forall A, B. \forall f : A \to B.\ \forall g_1, g_2 : B \to A.$

$$f \circ g_1 = id_B \wedge g_1 \circ f = id_A \wedge$$
$$f \circ g_2 = id_B \wedge g_2 \circ f = id_A \Rightarrow g_1 = g_2 .$$

Dokaz: Naj bosta A in B množici.
Naj bo $f : A \to B$ funkcija. Naj bosta $g_1, g_2 : B \to A$ funkciji
Predpostavimo:
1) $f \circ g_1 = id_B$ 3) $f \circ g_2 = id_B$
2) $g_1 \circ f = id_A$ 4) $g_2 \circ f = id_A$

Dokazujemo $g_1 = g_2$:

Iz 1) in 3) sledi

$$f\circ g_1 = f\circ g_2$$

Obe strani komponiramo z g_1 na levi:

$$g_1\circ (f\circ g_1) = g_1\circ (f\circ g_2)$$

asociativnost $\circ$

$$(g_1 \underset{(2)}{\circ} f)\circ g_1 = (g_1 \underset{(2)}{\circ} f)\circ g_2$$

$$id_A\circ g_1 = id_A\circ g_2$$

$$g_1 = g_2 \qquad \blacksquare$$

Oznaka: Inverz f označimo z f^{-1}, če obstaja.

Izrek: Funkcija je injektivna natanko tedaj, ko je mono.

S formulo:

$$\forall A,B\ \forall f: A\to B.\ f \text{ injektivna} \Longleftrightarrow f \text{ mono}$$

Dokaz: Naj bo $f: A\to B$ funkcija.

$\boxed{\Rightarrow}$ Predpostavimo, da je $\underbrace{f \text{ injektivna}}_{1}$. Dokazujemo: f mono.

Naj bosta $g, h: C\to A$ in denimo, da $\underbrace{f\circ g = f\circ h}_{2}$.

$$C \overset{g}{\underset{h}{\rightrightarrows}} A \xrightarrow{f} B$$

Dokazujemo $g = h$:

Naj bo $z\in C$. Dokazujemo $g(z) = h(z)$.

Iz (2) sledi:

$$(f\circ g)(z) = (f\circ h)(z)$$

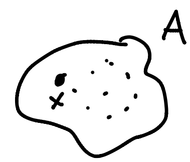
$$f(g(z)) = f(h(z)) \quad \text{uporabimo (1)}$$

$$g(z) = h(z).$$

$\boxed{\Leftarrow}$ Predpostavimo $\underbrace{f \text{ mono}}_{(2)}$. Dokazujemo: f injektivna.

Naj bosta $x, y \in A$ in denimo $\underbrace{f(x) = f(y)}_{(1)}$.

Dokazujemo $x = y$.



Definiramo funkciji $g, h : \{*\} \to A$;

$g(*) := x$

$h(*) := y$

Iz (1) sledi:

$$(f\circ g)(*) = f(g(*)) = f(x) = f(y) = f(h(*)) = (f\circ h)(*)$$

Preverili smo, da $f\circ g$ in $f\circ h$ enako delujeta na vseh elementih domene $\{*\}$. Torej: $f\circ g = f\circ h$.

Ker je f mono po (2), sledi $g = h$. Torej

$$x = g(*) = h(*) = y.$$

Izrek: Funkcija je surjektivna natanko tedaj, ko je epi.

Dokaz: Naj bo $f : A \to B$ funkcija.

$\boxed{\Rightarrow}$ Predpostavimo, da je f $\underbrace{\text{surjektivna}}_{1}$.

Dokazujemo f epi.

$$A \xrightarrow{f} B \overset{g}{\underset{h}{\rightrightarrows}} C$$

Naj bosta $g, h : B \to C$ in $\underbrace{g\circ f = h\circ f}_{2}$.

Dokazujemo $g = h$.

Naj bo $y \in B$. Dokazujemo $g(y) = h(y)$.

Obstaja $x \in A$, da je $f(x) = y$ po (1). $\}$ vstavimo $y = f(x)$.

Dokazujemo: $g(f(x)) = h(f(x))$.

$$(g\circ f)(x) = (h\circ f)(x)$$

Po (2) je $g\circ f = h\circ f$, torej je res $(g\circ f)(x) = (h\circ f)(x)$.

$\boxed{\Leftarrow}$ Predpostavimo $f : A \to B$ epi. Dokazujemo f surjektivna.

Naj bo $y \in B$. Dokazujemo, da obstaja $x \in A$, da je $f(x) = y$.

Definiramo $g, h : B \longrightarrow \mathcal{P}(B)$:

$$g(z) := \{z\}$$
$$h(z) := \{z \mid \exists a \in A\,.\, f(a) = z\} = \begin{cases} \emptyset & \text{če } \neg\exists a \in A\ f(a) = z \\ \{z\} & \text{če } \exists a \in A\ f(a) = z \end{cases}$$
$$= \{z\} \cap f_*(A).$$

Trdimo $g \circ f = h \circ f$: za $u \in A$ velja:

$$g(f(u)) = \{f(u)\}$$
$$h(f(u)) = \{f(u)\} \quad \text{ker } f(u) \in f_*(A).$$

Ker je f epi ga lahko pokrajšamo, torej

$$g = h$$

Torej je $g(y) = h(y)$

$$\{y\} = g(y) = h(y) = \{y \mid \exists a \in A\,.\, f(a) = y\}$$

Ker je $\{y\} = \{y \mid \exists a \in A\,.\, f(a) = y\}$ sledi

$$\exists a \in A\,.\, f(a) = y.$$

Torej za neki $a \in A$ velja $f(a) = y$.

Vzemimo $x := a$. Potem res velja $f(x) = y$. ∎

Definicija: Če za $f : A \to B$ in $g : B \to A$ velja

$$f \circ g = id_B$$

pravimo:

- f je levi inverz g
- g je desni inverz f
- f je retrakcija in g je prerez f-a.

Lema: 1) Vsaka retrakcija je epi.
2) Vsak prrerez je mono.

Dokaz:

1) Naj bo $f : A \to B$ retrakcija, kar pomeni, da imamo tudi $g : B \to A$, da je $f \circ g = id_B$.

Dokažemo: f epi.

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, shift left, "f"] & B \arrow[l, shift left, "g"] \arrow[r, shift left, "h"] \arrow[r, shift right, "l"'] & C \end{tikzcd}$$

Naj bosta $h, l : B \to C$ in denimo $h \circ f = l \circ f$.

Dokažemo $h = l$.

Ker je $h \circ f = l \circ f$, je tudi

$$\begin{aligned} (h \circ f) \circ g &= (l \circ f) \circ g && \text{asoc.} \\ h \circ (f \circ g) &= l \circ (f \circ g) && \text{predp.} \\ h \circ id_B &= l \circ id_B \\ h &= l. \end{aligned}$$

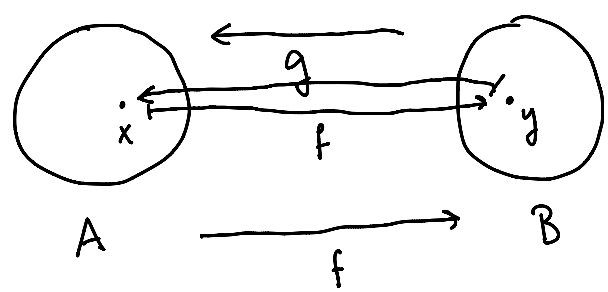
(2) doma.

Izrek: Preslikava je bijekcija, natanko tedaj, ko je izomorfizem.

Dokaz: Naj bo $f : A \to B$.

$\boxed{\Rightarrow}$ Predpostavimo f bijekcija. Dokazujemo: f je izomorfizem.

Iščemo $g : B \to A$, da velja $f \circ g = id_B$ in $g \circ f = id_A$.



Definiramo: $g(y) :=$ tisti $x \in A$, za katerega je $f(x) = y$

Utemeljimo, da je g dobro definirana:

- tak x obstaja, ker je f surjekcija
- tak x je en sam, ker je f injekcija

Preverimo:

- $f \circ g = id_B$:

  Naj bo $y \in B$, dokazujemo $f(g(y)) = y$.

  Res, po definiciji g.

- $g \circ f = id_A$:

  Naj bo $x \in A$, dokazujemo $g(f(x)) = x$.

  Res, po definiciji g.

$\boxed{\Leftarrow}$ Predpostavimo, da je f izomorfizem.

Dokazujemo: f bijekcija.

1) f je injekcija $\leftarrow$ dokazujem

$\Updownarrow$

f je mono $\leftarrow$ dokazujem

Po lemi zadošča poiskati levi invert f-a.

Ker je f izomorfizem, ima invert f^{-1};

torej f res ima levi invert.

2) f je surjekcija $\leftarrow$ dokazujemo

[domača naloga] Podobno 1). $\blacksquare$